

QA
1
J6836
année
22E
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

PUBLICATION MENSUELLE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DES CANDIDATS A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR
A L'INSTITUT AGRONOMIQUE
AUX BACCALAURÉATS, A L'INSTITUT COMMERCIAL
ET AUX ÉCOLES DE COMMERCE

Publié sous la direction

de M. Georges MARIAUD

DIRECTEUR DES ÉTUDES A L'ÉCOLE PRÉPARATOIRE SAINT-GEORGES
PROFESSEUR A L'INSTITUT COMMERCIAL

PUBLICATION FONDÉE EN 1877

VINGT-DEUXIÈME ANNÉE 1897-98



N° 1. — Octobre 1897.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

AVIS AUX LECTEURS

Les lecteurs sont informés que la direction de ce journal a passé des mains de M. de Longchamps aux mains d'un comité composé de professeurs éminents des Ecoles spéciales, Lycées et Collèges de Paris, et présidé par M. Georges Mariaud, directeur des études à l'Ecole préparatoire Saint-Georges et professeur à l'Institut Commercial.

M. de Longchamps avait mis au service de cette publication, fondée depuis plus de 20 années, son activité si dévouée et sa compétence si éclairée : mais son éloge n'est plus à faire auprès de ceux qui l'ont suivi dans son œuvre.

La nouvelle Direction saura montrer un dévouement égal; M. Mariaud tient à l'affirmer ici, au nom du Comité et en son nom. Elle s'attachera à accroître encore l'intérêt de cette publication destinée aux jeunes gens qui préparent des examens et concours.

C'est ainsi que pour répondre à un besoin réel, né de la différence devenue profonde entre les divers genres d'examens et concours roulant sur les *Élémentaires*, il a été décidé que les questions proposées par le Comité seraient désormais classées par genres d'examens et concours. Cette modification inaugure une idée nouvelle et ne peut qu'être d'une grande utilité aux divers groupes de candidats.

Voici le nouveau plan de ce journal.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées par le Comité aux candidats :

1° *A l'Ecole spéciale militaire de Saint-Cyr* ;

2° *A l'Institut national agronomique* ;

3° *Au Baccalauréat lettres mathématiques* ;

4° *Aux Ecoles d'agriculture* ;

5° *Aux Ecoles de commerce.*

DEUXIÈME PARTIE

Solutions dans le même ordre des questions proposées dans les numéros précédents, suivies du nom des personnes ayant résolu les questions.

TROISIÈME PARTIE

Questions diverses, théories et démonstrations nouvelles relatives aux élémentaires.

CORRECTION DES COPIES

Mais il ne suffit pas aux divers groupes de candidats d'être guidés chacun séparément dans la route spéciale qui conduit au but; il faut encore, quand il s'agit d'un concours, que les candidats à un même concours puissent périodiquement *comparer* les progrès accomplis. Le Comité s'est aussi préoccupé de satisfaire à ce désideratum : il corrigera, annotera, *classera* et retournera *franco* les copies de ceux qui s'abonneront à la *Correction* et traiteront les questions mensuelles proposées dans le journal.

Ce classement des copies venues des divers points de la France sera pour le candidat le renseignement le plus précieux. Cette idée heureuse a rencontré l'adhésion de tous ceux à qui elle a déjà été communiquée.

Le Président du Comité,

GEORGES MARIAUD.

NOTA. — Voir, pour l'abonnement à la *Correction des copies*, à la fin du fascicule.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées par le Comité aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

ÉCRIT

MATHÉMATIQUES

1. — On considère tous les triangles qui ont un sommet A commun, la bissectrice AD de l'angle A invariable de grandeur et de position et dont le cercle circonscrit passe par un troisième point fixe F de la droite AD ;

1° Démontrer que dans tous ces triangles le produit de la hauteur par le diamètre du cercle circonscrit est constant ;

2° Trouver le lieu du milieu du côté opposé au sommet A ;

3° Trouver le lieu du point de rencontre des médianes ;

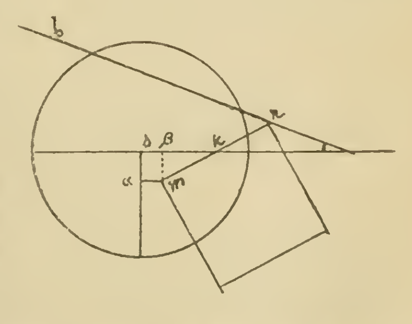
4° Construire le triangle connaissant, outre les trois points A, D, F, soit la grandeur de l'angle A, soit la longueur du côté opposé BC.

2. — Dans un triangle ABC on donne l'angle $B = 30°$, le rapport $\frac{b}{c} = m$ et la distance x entre les pieds des bissectrices des angles intérieur et extérieur du sommet A. Calculer le côté c, et construire géométriquement ce triangle.

ÉPURE

3. — Un cône droit a pour base une circonférence de rayon 9 centimètres et de centre s, située dans le plan H ; s qu'on placera au centre de la feuille est aussi la projection du sommet dont la cote est de $17^{cm},5$,

Un prisme a pour base un carré placé aussi dans le plan H et dont le côté $mn = 9^{cm},2$ est défini par les distances de m aux



parallèles menées par s aux côtés du cadre : $\alpha m = 2$ centimètres,

$\beta m = 2^{cm},5$; et par la distance à s de l'intersection K, $sK = 6^{cm},2$. La direction des arêtes du prisme en projection est nb qui fait angle de 32° avec $s\beta$; leur pente $= 1/2$.

On demande de trouver l'intersection du prisme et du cône et de représenter le cône traversé par le prisme, celui-ci étant supposé enlevé. Tangentes aux points remarquables.

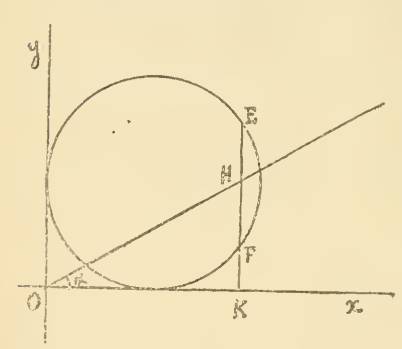
CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

4. — On donne

$$A = 242,728$$
$$B = 32°6'57''$$
$$C = 110°32'20''.$$

QUESTIONS AYANT ÉTÉ PROPOSÉES A L'ORAL

5. — Etant donnés 2 axes rectangulaires et une circonférence tangente à ces axes par le point O on mène une sécante faisant un angle α avec l'axe des x ; déterminer une corde parallèle à l'axe des y et rencontrant la sécante en un point H tel que $\overline{EF}^2 + \overline{HK}^2 = m^2$.



Prendre pour inconnue $OK = x$.

6. — Calculer les angles d'un triangle connaissant a, $B - C = \alpha$ et la surface $= m^2$.

7. — Résoudre et discuter l'équation

$$x^2 - 2x + \log a = 0.$$

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

8. — Etant donnée une circonférence de centre O, à quelle distance x de O faut-il prendre un point P tel que si l'on mène de ce point les deux tangentes PA et PB au cercle O ; le cercle O′ tangent à ces deux droites et à la circonférence O ait pour surface πm^2.

9. — Calculer les 3 côtés d'un triangle rectangle connaissant la somme $\frac{1}{3}\pi b^3$ des volumes engendrés par le triangle en tournant successivement autour des côtés de l'angle droit et la somme m^2 des surfaces du triangle et d'un rectangle de hauteur a ayant pour base le segment intercepté sur l'hypoténuse par les points de contact des cercles ex-inscrits dans les deux angles aigus.

Discuter. — Examiner en particulier le cas de $a = b$.

10. — Calculer en se servant des logarithmes la valeur de a donnée par

$$a = \frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

pour $C = 38\,500$, $r = 0{,}035$, $n = 10$.

Dire quelle est cette formule.

PHYSIQUE ET CHIMIE

11. — 1° Sur l'un des plateaux d'une balance on a placé un vase contenant une dissolution saline de densité 1,5 et on a fait la tare pour établir l'horizontalité du fléau.

Au-dessus du vase on suspend par un fil fin un fragment de platine, de manière à ce qu'il plonge constamment dans le liquide. L'horizontalité du fléau sera-t-elle dérangée? Que faudra-t-il faire pour la rétablir sachant que le platine a pour densité 21 et que le fragment pèse $75^{gr},6$.

12. — 2° Qu'est-ce que l'état hygrométrique de l'air? Comment l'obtient-on par l'Hygromètre de Regnault que l'on décrira d'abord sommairement.

3° Préparation du phosphore blanc. Fabrication des allumettes.

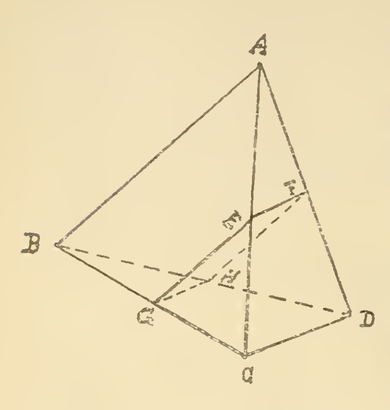
III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

MATHÉMATIQUES

13. — 1re (*Obligatoire*). On coupe un tétraèdre quelconque ABCD par un plan parallèle aux côtés opposés AB et CD;

1° Démontrer que la section EFGH faite par ce plan dans le tétraèdre est un parallélogramme.

2° Démontrer que $\frac{EG}{AB} + \frac{EF}{CD}$ reste constant quand le plan EFGH se déplace parallèlement aux côtés.



3° Trouver la position du plan pour laquelle la surface du parallélogramme est maximum.

14. — 2me (*au choix*) I. Théorie du plus grand commun diviseur de 2 nombres par la division.

15. — II. Si un nombre N divisant A et B donne des quotients premiers entre eux, N est le plus grand commun diviseur de A et B.

16. — III. Tout nombre qui divise le produit de deux autres et est premier avec l'un d'eux divise l'autre.

PHYSIQUE

PREMIÈRE QUESTION (*Obligatoire*)

17. — Les deux poids de la machine d'Atwood sont de 105 grammes chacun ; le poids additionnel est de 3 grammes. Avec quelle vitesse le poids descendant atteindra-t-il le curseur plein placé à $1^m,65$.

$$G = 9^m,8.$$

DEUXIÈME QUESTION (*Au choix*)

18. — I. Calculer l'accélération dans la machine d'atwood.

19. — II. Démontrer à l'aide de la machine d'atwood que les accélérations sont proportionnelles aux masses.

20. — III. Machine de Morin.

IV. — AU BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE QUESTION (*Obligatoire*)

21. — Étant donné le polynome

$$x^3 + px + q,$$

trouver la relation qui doit exister entre p et q pour que ce polynôme soit divisible par $(x - a)^2$.

DEUXIÈME QUESTION (*Au choix*)

22. — I. Démontrer la propriété de la tangente à l'ellipse.

23. — II. Lieu des symétriques d'un foyer par rapport aux diverses tangentes à l'ellipse.

24. — III. Lieu des points tels que les 2 tangentes à l'ellipse issues de chacun deux soient perpendiculaires l'une à l'autre.

PHYSIQUE

PREMIÈRE QUESTION (*Obligatoire*)

25. — Un vase cylindrique de verre ayant 2 centimètres carrés de section intérieure est suspendu par son fond à l'extrémité d'une tige de fer verticale longue de $0^m,75$ dont l'autre extrémité est fixée en un point A.

Quel poids de mercure faut-il y verser pour que le centre de gravité de cette masse de mercure reste à une distance constante de A.

Coefficient de dilatation linéaire du fer 0,000012,

» du verre 0,000008,

Coefficient de dilatation absolue du mercure 0,00018.

Densité du mercure à 0° = 13,6.

DEUXIÈME QUESTION (*Au choix*)

26. — I. Lunette terrestre.

27. — II. Lunette de Galilée.

28. — III. Télescope de Newton.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

PREMIÈRE QUESTION

29. — On a un terrain rectangulaire dont on peut faire un nombre exact de lots de 150, 120 et 180 mètres carrés. La surface totale est inférieure à 20 ares.

1° Quelles sont les dimensions de ce terrain, sachant que sa longueur est double de sa largeur.

2° On a vendu ce terrain et on a placé à 4 1/2 % le prix de vente. Au bout de 2 ans et 4 mois on a retiré, capital et intérêts compris, la somme de 23 868 fr. Quel est le prix du mètre carré ?

DEUXIÈME QUESTION

30. — On donne une pyramide régulière à base carrée dont le côté a 12 centimètres ; l'arête a une longueur de 20 centimètres ; on coupe le solide par un plan parallèle à la base et la section obtenue a une surface de 11 025 mètres carrés.

Calculer 1° la surface latérale de la pyramide à un centimètre carré près ; 2° le volume à un centimètre cube près de la petite pyramide

TROISIÈME QUESTION

31. — Calculer par logarithmes la valeur de x donnée par

$$x = \sqrt[3]{(29,85)^2} \times \sqrt{(17,53^3)}.$$

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

32. — Calculer à $\frac{1}{11}$ près $\frac{27\sqrt{7}}{5}$.

33. — Un billet payable dans 54 jours escompté en dehors et en dedans au taux de 3 % a donné 1 fr. 20 comme différence des deux escomptes. On demande la valeur nominale du billet.

34. — Déterminer un nombre de 3 chiffres sachant : 1° que le chiffre des dizaines égale celui des unités ; 2° qu'en ajoutant 42 au double du nombre, on obtient le nombre renversé; 3° que si on met le chiffre des dizaines à la place de celui des centaines et ré-

ciproquement on obtient un nombre qui, augmenté de 27, égale le nombre renversé.

35. — Calcul logarithmique. — Calculer

$$x = 317{,}23\sqrt[5]{\frac{\overline{23{,}41}^3}{2\sqrt{3}}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

Pour mémoire. — Cette partie du nouveau plan ne pouvant être remplie qu'à partir du n° 2 de novembre.

TROISIÈME PARTIE

Questions diverses

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE
CONCOURS DE 1897

Solution, par M. le Chanoine Reboul, licencié es-sciences mathématiques.

I. — On donne dans un triangle ABC l'angle A, le côté b et le rapport $\frac{a}{m} = K$ du côté a à la médiane correspondante m.

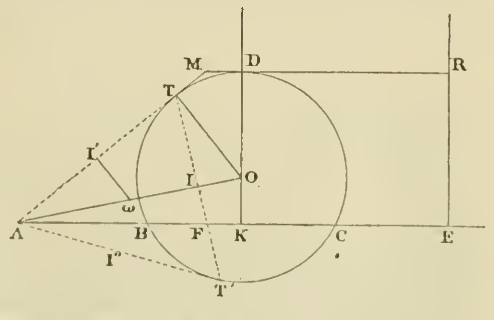
Calculer le côté c. — Discuter.

II. — On donne trois points fixes A, B, C en ligne droite; on considère une circonférence variable passant par les points B et C; on mène par le point A les deux tangentes AT, AT' et la corde des contacts TT'. On demande :

1° Les lieux géométriques des milieux des côtés du triangle ATT';

2° Le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle;

3° Les lieux des points d'intersection de la tangente AT avec chacune des deux tangentes parallèles à la droite ABC.



1. — Les équations du problème sont évidemment .

$$\frac{a}{m} = K,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$2m^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2.$$

En remplaçant, dans la seconde équation, a^2 par m^2K^2 et m^2 par $\frac{2(b^2 + c^2)}{K^2 + 4}$, on a pour calculer c :

$$\text{(A)} \qquad c^2 + \frac{2bc(K^2 + 4) \cos A}{K^2 - 4} + b^2 = 0.$$

Le termé connu b^2 étant positif, c pour être acceptable doit être réel et positif, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$\text{(1)} \qquad (K^2 + 4)^2 \cos^2 A - (K^2 - 4)^2 > 0,$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{\cos A}{K^2 - 4} < 0.$$

Il faut remarquer que l'inégalité (1) donne pour cos A, une valeur absolue inférieure à l'unité.

Cela posé, faisons sur A les deux hypothèses : $A < 90$, $A > 90$.

1° $A < 90$. L'inégalité (2) impose la condition $K^2 < 4$, et l'inégalité (1) se réduit à : $(K^2 + 4) \cos A + K^2 - 4 > 0$,
ou :

$$\cos A > \frac{4 - K^2}{4 + K^2}.$$

Si cette condition est satisfaite le problème comporte deux solutions, si elle ne l'est pas le problème est impossible.

2° $A > 90$. L'inégalité (2) impose la condition $K^2 > 4$, et l'inégalité (1) se réduit à : $(K^2 + 4) \cos A - (K^2 - 4) > 0$,
ou :

$$\cos A > \frac{K^2 - 4}{K^2 + 1}.$$

Comme précédemment, le problème comporte 2 ou v solutions selon que cette condition est ou n'est pas satisfaite.

Remarque. — Dans la discussion, nous avons supposé $K^2 \lessgtr 4$. En supposant $K^2 = 4$, l'équation (A) se réduit à : $2bc(K^2 + 4) \cos A = 0$, d'où $\cos A = 0$. Le triangle donné est rectangle et l'on a pour c une valeur indéterminée. On pouvait du reste prévoir ce résultat. Dans tout triangle rectangle, en effet, le rapport K^2 vaut 4.

2. — 1° Soit O le centre de la circonférence variable, lequel se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu K de BC. Posons $AK = a$, $BK = b$ et joignons le point O aux points A et T.

Considérons le point I milieu de TT′ comme intersection de OA et de TT′, le triangle rectangle AOT donne :

$$\begin{aligned} AI \times AO &= \overline{AT}^2, \\ &= AB \times AC, \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Le produit est constant, le point O décrit la perpendiculaire KO, le point J décrira donc la figure inverse, c'est-à-dire une circonférence passant au pôle A et au point F (intersection de la droite fixe ABC et de la droite mobile TT′, ce point F est fixe). AF est le diamètre de cette circonférence et a pour valeur $\frac{a^2 - b^2}{a}$.

Considérons le point I′ milieu de AT. On a évidemment :

$$AI' = \frac{AT}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}.$$

Le lieu décrit par le point I′ est donc une circonférence de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}$.

Le lieu décrit par le point I″ milieu de AT′ est évidemment la même circonférence.

2° Le centre ω du cercle circonscrit au triangle ATT′ se trouve à l'intersection de AD et de la perpendiculaire I′ω élevée sur le milieu de AT. Cela posé, les triangles semblables ATO, AI′ω donnent :

$$\frac{A\omega}{AD} = \frac{AI'}{AI} = \frac{1}{2}.$$

A étant considéré comme centre d'homothétie et $\frac{1}{2}$ comme rapport, ω décrit une droite perpendiculaire à la droite fixe ABC.

3° Soient M le point de rencontre des deux tangentes au cercle mobile O et ER une perpendiculaire à ABC telle que l'on ait : $DR = \sqrt{a^2 - b^2}$.

La tangente MD et MT, issues du point M, étant égales :

$$DR = MA,$$

d'où :

$$MR = MA.$$

Le point M décrit donc une parabole ayant le point A pour foyer et la droite ER pour directrice.

EPURE

Une sphère est tangente au plan horizontal en un point A ; elle passe par un point B qui a pour côté 72^{mm} et qui se projette en un point b à une distance de A égale à 96^{mm}. (Placer A et b sur une droite distante de 115^{mm} du bord inférieur de la feuille, A à 20^{mm} à gauche du milieu de cette droite et b à gauche de A).

Considérer le plan P mené, par le point A, perpendiculairement au rayon OB, et le triangle équilatéral CDE inscrit à la section de cette sphère par ce plan, en plaçant horizontalement le côté DE de manière que sa cote soit inférieure à celle de C. — Sur la perpendiculaire en C, au plan P, prendre un point S de cote égale à 240^{mm}.

La sphère étant supposée opaque, représenter la portion de son volume comprise dans le trièdre dont les arêtes sont les droites indéfinies SC, SD, SE.

CALCUL LOGARITHMIQUE

Résoudre un triangle connaissant les trois côtés

$$a = 2\,598 \qquad b = 2\,333 \qquad c = 2\,543.$$

Formules :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r = \frac{S}{p}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}; \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}; \quad \operatorname{tg} C = \frac{r}{p-c}$$

$$p = 3\,737; \quad p-a = 1\,139; \quad p-b = 1\,404; \quad p-c = 1\,194$$

$$\log p = 3{,}57252 \qquad \operatorname{colog} p = \bar{4}{,}42648$$

$$\log(p-a) = 3{,}05652 \qquad \operatorname{colog}(p-a) = \bar{4}{,}94343$$

$$\log(p-b) = 3{,}14737 \qquad \operatorname{colog}(p-b) = \bar{4}{,}85263$$

$$\log(p-c) = 3{,}07700 \qquad \operatorname{colog}(p-c) = \bar{4}{,}92300$$

$$\operatorname{Log} S = \frac{1}{2}\log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) =$$

$$= 6{,}42671$$

$$S = 2\,671\,200 \text{ mètres carrés}$$

$$\log r = \log S + \operatorname{colog} p = 2{,}85417 :$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-a) = \bar{1}{,}79767 \qquad A = 64^\circ 13' 20''$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-b) = \bar{1}{,}70682 \qquad B = 53^\circ 57' 46''$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-c) = \bar{1}{,}77719 \qquad C = 61^\circ 48' 54''$$

Le total est bien $A + B + C = 180^\circ$

SOLUTION DES QUESTIONS

Du Concours
d'admission de 1897 à l'Institut National Agronomique

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE QUESTION

Par la circonférence d'un cercle de rayon r *on fait passer une sphère que l'on coupe par deux plans* P *et* P′ *parallèles au plan du cercle donné et situés de part et d'autre à une distance* h *de ce plan.*

1° *Trouver à quelles conditions on peut déterminer le rayon* R *de cette sphère de façon qu'elle soit coupée par chacun des deux plans* P *et* P′ *et déterminer les limites entre lesquelles varie* R ;

2° *Évaluer le volume du segment sphérique déterminé par les plans* P *et* P′ *et la sphère.*

1° Il est tout d'abord évident qu'il faut $R \geqslant r$. Cette condition peut d'ailleurs se déduire par le calcul. Soient ω le centre du cercle donné, ω' et ω'' ceux des cercles de section, Σ et Σ' les pôles communs de ces cercles, on a

$$\omega\Sigma + \omega\Sigma' = 2R$$
$$\omega\Sigma \times \omega\Sigma' = r^2$$

$\omega\Sigma$ et $\omega\Sigma'$ sont donc racines de l'équation

$$X^2 - 2RX + r^2 = 0$$

dont les racines seront réelles si

$$R^2 - r^2 \geqslant 0$$

ou

$$R \geqslant r.$$

D'autre part, pour qu'il y ait *possibilité* d'intersection avec les deux plans d'une sphère menée par la circonférence ω il faut qu'on ait ($\omega\Sigma$ étant $< \omega\Sigma'$)

$$h \leqslant \omega\Sigma$$

ou

$$h \leqslant R - O\omega$$

ou

$$h \leqslant \sqrt{r^2 + \overline{O\omega}^2} - O\omega$$

Le deuxième membre est variable, mais a pour maximum r (pour $O\omega = 0$, c'est-à-dire quand la sphère décrite est concentrique à la circonférence donnée). Donc, pour qu'il y ait double intersection *possible* il faut : $h < r$.

Exprimons maintenant la condition pour que la double intersection *ait lieu.*

h doit être inférieur à $\omega\Sigma$ et à $\omega\Sigma'$ ce qui exige que l'on ait

$$f(h) = h^2 - 2Rh + r^2 \geqslant 0$$

d'où

$$R < \frac{h^2 + r^2}{2h}.$$

Les limites de variation de R *sont donc :*

$$r \leqslant R \leqslant \frac{h^2 + r^2}{2h}$$

avec cette condition de possibilité du problème : $h < r$.

2° Soient ρ et ρ' les rayons des sections P et P' : le volume du segment est :

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{\omega'\omega''}^3 + \frac{1}{2}\pi\omega'\omega''(\rho^2 + \rho'^2)$$

ou en remplaçant $\omega'\omega''$ par $2h$

$$V = \frac{4}{3}\pi h^3 + \pi h(\rho^2 = \rho'^2)$$

or

$$\rho^2 = \overline{OP}^2 - \overline{O\omega'}^2 = R^2 - (h + \sqrt{R^2 - r^2})^2$$
$$\rho'^2 = \overline{OP'}^2 - \overline{O\omega''}^2 = R^2 - (h - \sqrt{R^2 - r^2})^2$$
$$\rho^2 + \rho'^2 = 2R^2 - (2h^2 + 2R^2 - 2r_2) = 2(r^2 - h^2)$$

d'où

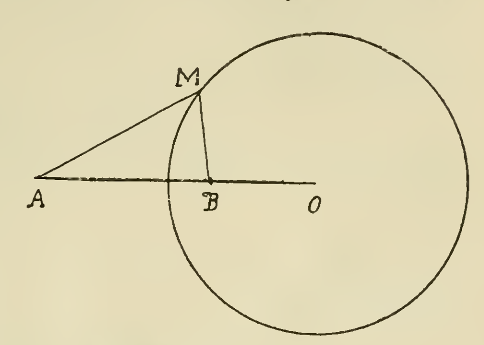
$$V = \frac{4}{3}\pi h^3 + 2\pi h(r^2 - h^2)$$

et

$$V = \frac{2}{3}\pi h(3r^2 - h^2).$$

DEUXIÈME QUESTION

Sur une droite indéfinie on prend un point O tel que $\frac{AO}{BO} = K^2$ et de O comme centre, on décrit un cercle ayant pour rayon la moyenne géométrique entre OA et OB. Évaluer le rapport $\frac{MA}{MB}$, M étant un point quelconque de ce cercle.



D'après l'énoncé on a

$$\frac{AO}{MO} = \frac{MO}{BO}.$$

Donc les deux triangles AOM et MOB sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Donc on a :

$$\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2} = \frac{\overline{AO}^2}{\overline{MO}^2} = \frac{\overline{AO}^2}{AO \times BO} = \frac{AO}{BO} = K^2$$

d'où

$$\frac{MA}{MB} = K.$$

CALCUL LOGARITHMIQUE

TROISIÈME QUESTION

Calculer la valeur numérique de $h - C$, C étant donné par la formule

$$C = \frac{(\mu - \lambda)th}{1 + \mu t}$$

sachant que

$$\mu = 0{,}0001818, \qquad \lambda = 0{,}0000184$$
$$t = 16, \qquad h = 736^{mm}{,}1$$

(on se servira de tables logarithmiques).

On a

$$h - C = h\,\frac{1 + \lambda t}{1 + \mu t}.$$

Sous cette forme on reconnaît la formule de correction de la hauteur barométrique relative à la température. (Physique de Drion et Fornet, page 205). Substituant on a

$$h - C = 736,1 \frac{1 + 0,0000184 \times 16}{1 + 0,0001818 \times 16}.$$

Calcul de $1 + \lambda t$.

$$\text{Log } 16 = 1,20412$$
$$\text{Log } 0,0000184 = \bar{5},26482$$
$$\text{Log } 1 + \lambda t = \bar{4},46894$$

et d'où

$$\lambda t = 0,0002944$$

et

$$1 + \lambda t = 1,0002944.$$

Calcul de $1 + \mu t$.

$$\text{Log } 16 = 1,20412$$
$$\text{Log } 0,0001818 = \bar{4},25959$$
$$\text{Log } \mu t = \bar{3},46371$$

d'où

$$\mu t = 0,0029088$$

et

$$1 + \mu t = 1,0029088$$

dès lors

$$h - C = 736,1 \frac{1,0002944}{1,0029088}.$$

Prenant les logarithmes, on a

$$\text{Log } (h - C) = \log 736,1 + \log 1,0002944 + \text{colog } 1,0029088$$
$$\text{Log } 736,1 = 2,86694$$
$$\text{Log } 1,0002644 = 0,00128$$
$$\text{Colog } 1,0029088 = 1,99866$$
$$2,86688$$
$$h - C = 736$$

PHYSIQUE

Un aérostat du volume de 60 mètres cubes est complètement rempli d'hydrogène dont la densité, par rapport à l'air, est de 0,007. On demande quel doit être le poids de l'enveloppe et des accessoires pour qu'il puisse atteindre une hauteur où la pression est

de 152 millimètres et la température de 60° (on ne tiendra pas compte de la poussée de l'air sur les accessoires).
soit x kilos le poids de l'enveloppe; la température initiale n'étant pas indiquée, nous devons la supposer de 0°. Il n'est pas indiqué non plus si le ballon est ouvert pour éviter la rupture de l'enveloppe sous la pression de l'hydrogène quand le ballon monte. Il s'agit ici d'un problème purement théorique dont l'énoncé semble au contraire écarter cette hypothèse.

Écrivons donc que la poussée de l'air à la hauteur et à la température considérée est au moins égale au poids de l'aérostat, lequel poids reste constant.

$$60 \times \frac{152}{760} \times \frac{1}{1 + \frac{60}{273}} \times 1,293 \geqslant 60 \times 1,293 \times 0,07 + x$$

$$x \leqslant 60 \times 1,293\left(\frac{1}{5} \times \frac{91}{111} - 0,07\right) = 11^{\text{kg}},04.$$

RELATIONS MÉTRIQUES
ET TRIGONOMÉTRIQUES
ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES
DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **Lecocq**, ancien professeur au Lycée d'Avignon.

(*Suite*, 1897; p. 174).

Note 1

Cette note se rattache au paragraphe 16.

$$\text{De } \frac{\sqrt{abcd}}{\text{S}} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\delta^2-\beta^2}\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2},$$

on conclut :

$$\frac{abcd - \text{S}^2}{\text{S}^2} = \frac{(\alpha^2+\delta^2)(\beta^2+\gamma^2)(r'^2-r''^2)\left[(d-b)^2-(a-c)^2\right]}{16\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2};$$

r' et r'' étant les distances de L aux côtés opposés ; a, c ou b, d.

On a donc

$$\frac{abcd - S^2}{S^2} = \frac{(r'^2 - r''^2)(a + d - b - c)(d + c - a - b)}{16r'^2r''^2}.$$

Ainsi $S = \sqrt{abcd}$ dans l'un ou l'autre des cas suivants :

1° Si $r' = r''$ (quadrilatère inscriptible et circonscriptible).

2° Si $d + c = a + b$, ou $a + d = b + c$ (inscriptible).

En particulier si, par les foyers d'une ellipse, on fait passer un cercle qui la coupe en quatre points réels, l'un des quadrilatères symétriques inscrits déterminés aura pour surface la racine carrée du produit des quatre rayons vecteurs.

Note 2

Maximum de la surface du quadrilatère ABCD (*fig.* 5) *les points* S, Q *et* O *restant fixes.*

Soit O' le milieu de OI et $OI = 2r$.

$$\widehat{O'MP} = \xi \qquad \widehat{O'ML} = \varphi \qquad MO' = D \qquad \text{et } \operatorname{tg} \varphi = x,$$

la surface $S = 2f \times LP'$ devient :

$$S = 2\mu \sin(\xi + \varphi)\sqrt{r^2 - D^2\sin^2\varphi},$$

φ varie de $-\arcsin\frac{r}{D}$ à $+\arcsin\frac{r}{D}$ de droite à gauche.

L'équation du maximum est :

$$\operatorname{tg}\xi(D^2 - r^2)x^3 - (2D^2 - r^2)x^2 - \operatorname{tg}\xi\,(D^2 + r^2)x + r^2 = 0,$$

pour $x = 0$ le premier membre se réduit à $+ r^2$.

Le maximum ne correspond pas à $\varphi = 0$, ce qui est évident *a priori*, car depuis $\varphi = -\arcsin\frac{r}{D}$ jusqu'à 0, les deux facteurs f et LP' augmentent tous les deux. Or, pour $\varphi = 0$ la différentielle $d(f)$ est nulle ou au moins du second ordre, tandis que $d(LP')$ est du premier.

L'angle OMO', valeur particulière de φ, est donné par

$$\frac{r}{\sin\varphi} = \frac{D}{\cos(\xi + \varphi)} \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{r\cos\xi}{D + r\sin\xi},$$

posons enfin

$$\frac{r}{D} = \lambda \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\lambda \cos \xi}{1 + \lambda \sin \xi},$$

et l'équation devient :

$$\operatorname{tg} \xi (1 - \lambda^2)x^3 - (2 - \lambda^2)x^2 - \operatorname{tg} \xi (1 + \lambda^2)x + \lambda^2 = 0.$$

Substituons à x la valeur particulière ci-dessus, on trouvera le résultat essentiellement négatif, quel que soit ξ, de 0 à π et sous la condition : $r < D$

$$- \frac{r(D^2 - r^2)(r + D \sin \xi)}{D(D + r \sin \xi)^3}.$$

Donc, la position du maximum est intermédiaire entre celle où l'une des diagonales est le diamètre sur PO du cercle circonscrit, et celle où les diagonales sont rectangulaires; mais elle ne correspond pas au cas où le quadrilatère serait circonscriptiblé; autrement dit : c'est dans l'angle OMO′, en dehors duquel se trouve le point ω, que tombe la direction de la droite qui, partant de M, coupe le cercle de diamètre OI aux milieux des diagonales du quadrilatère maximum. (Excepté le cas où SP = QP).

CERCLES ET DROITES ALLOTROPES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, 1897, page 193)

66. — Tout point du second axe d'une conique est le centre d'un cercle bitangent à contacts réels ou imaginaires. Il en est de même de ceux des points du premier axe qui, dans l'ellipse, se trouvent entre les deux foyers, ou, dans l'hyperbole, sur l'un des prolongements de la distance focale. Il nous reste à considérer les autres points du premier axe.

Appelons *cercle allotrope* tout cercle ayant un de ces points pour centre, et dont le rayon soit, avec la moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux foyers, dans le rapport de b à c. Prenons, comme *saillant allotrope*, le conjugué harmonique du centre du cercle par rapport aux foyers, et, comme *droite allotrope*, la *sypolaire* du saillant, c'est-à-dire la symétrique de sa polaire par rapport au centre du cercle. On peut établir les

propriétés des lignes ainsi définies par une méthode analogue à celle qui a été suivie dans l'étude des cercles bitangents de première espèce à contacts imaginaires [**32**]; c'est pourquoi nous nous bornerons à énoncer, sans démonstration, les principales d'entre elles. A cet effet, nous sommes encore obligés d'avoir recours à une locution nouvelle, celle d'*élongation d'un point par rapport à un cercle :* nous désignerons ainsi la longueur de la droite joignant ce point à l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à celui sur lequel il est situé. Quant aux *nœuds d'élongation* d'une droite et d'un cercle, ce seront les extrémités de la corde commune aux circonférences qui ont pour centres les divers points de la droite, et, pour rayons, les élongations de ces points.

La sypolaire, dans un cercle allotrope, de tout point de la droite allotrope correspondante, coïncide avec la polaire du même point dans la conique, et passe par le saillant.

Le pôle d'une droite quelconque par rapport à la conique et le sypôle de la même droite par rapport au cercle sont en ligne droite avec le saillant. Nous entendons, par sypôle d'une droite, le symétrique, par rapport au centre du cercle, du pôle de cette droite, ou le point dont elle est la sypolaire.

La polaire d'un point quelconque du plan dans la conique, et la sypolaire du même point dans le cercle se coupent sur la droite allotrope.

De chacun des nœuds d'élongation d'une tangente à la conique par rapport à un cercle allotrope, on voit sous un angle droit la portion de cette tangente comprise entre le point de contact et la droite allotrope.

Le lieu des nœuds d'élongation d'une même tangente à la conique par rapport aux divers cercles allotropes se trouve sur les droites dont chacune passe par le point de contact et par l'un des foyers. Il constitue les portions de ces droites non occupées par le lieu des nœuds [**7**] de la même tangente et des cercles bitangents.

Il y a un rapport constant, égal à l'excentrité, entre l'élongation d'un point quelconque de la conique par rapport à un cercle allotrope et la distance du même point à la droite allotrope correspondante.

Si l'on décrit des circonférences dont chacune ait, pour diamètre,

la portion de l'axe focale comprise entre les centres de similitude de deux cercles allotropes, le second axe de la conique sera l'axe radical de deux quelconques de ces circonférences, et les foyers seront leurs nœuds [7] par rapport à cet axe.

DE L'ÉLONGATION

67. — Les notions qui vont suivre ne sont pas étrangères à la théorie des cercles bitangents aux coniques : une fois admises, elles permettraient d'exposer cette théorie un peu plus simplement ; en outre, elles conduisent à étendre, avec des énoncés convenablement modifiés, certaines propriétés des cercles bitangents et des cercles allotropes à d'autres cercles ayant aussi leurs centres sur les axes.

DIVISIONS SYHARMONIQUES

68. — Nous disons que deux segments d'une même droite forment une *division syharmonique*, lorsqu'en substituant, à une extrémité de l'un, son symétrique par rapport au milieu de l'autre, on obtient une division harmonique. Le *segment primitif* est celui qui ne se trouve pas modifié par cette substitution ; l'autre est le *segment secondaire*. Par exemple, sur la droite qui passe par le centre d'un cercle et par un point donné, ce point, sa sypolaire et la circonférence déterminent une division syharmonique, dans laquelle le diamètre intercepté constitue le segment primitif.

Dans toute division syharmonique, les deux segments empiètent l'un sur l'autre, et le milieu du segment primitif se trouve toujours sur le segment secondaire.

69. — *Le produit des distances aux extrémités du segment secondaire est le même pour les deux extrémités du segment primitif.*

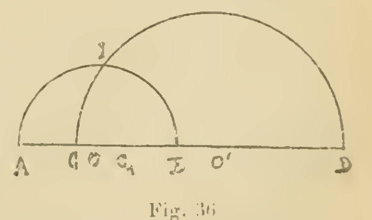


Fig. 36

Soient AB (*fig.* 36) le segment primitif, O son milieu, CD l'autre segment, C_1 le symétrique de C par rapport à O. Les points C_1, D étant conjugués harmoniques de A, B, les distances BC_1, BD sont propor-

tionnelles à AC_1, AD. Remplaçant, dans la proportion, BC_1 par son égal AC, et AC_1 par son égal BC, on obtient

$$AC.AD = BC.BD.$$

Réciproquement, si les deux segments AB, CD empiètent l'un sur l'autre, et si l'égalité précédente se trouve satisfaite, AB sera le segment primitif et CD le segment secondaire d'une même division sylharmonique.

70. — *La moitié du segment primitif est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux extrémités de l'autre segment.*

On a en effet (*fig.* 36) $\overline{OA}^2 = OC_1 . OD$ et $OC_1 = OC$; d'où résulte

$$\overline{AO}^2 = OC.OD.$$

Réciproquement, si le milieu O de AB se trouve sur CD, et si OA est moyenne proportionnelle entre OC et OD, le segment CD formera avec AB une division sylharmonique.

71. — *La corde commune aux circonférences décrites sur les deux segments comme diamètres est égale au segment primitif, et passe par le milieu de ce segment.*

Au point O (*fig.* 36), élevons, sur AB, la perpendiculaire OI égale à OA. D'après la propriété précédente, OI est moyenne proportionnelle entre OC et OD; le point I appartient donc à la circonférence décrite sur CD comme diamètre.

Le segment secondaire est toujours plus grand que le segment primitif.

72. — *Le carré de la moitié du segment secondaire est moyenne arithmétique entre les carrés des distances du milieu de ce segment aux extrémités du segment primitif.*

Soit O′ (*fig.* 36) le milieu de CD; tirons O′I. On peut d'abord remarquer, dans le triangle rectangle OIO′, que le carré du demi-segment secondaire est la somme des carrés du demi-segment primitif et de la distance mutuelle des milieux des deux segments; ainsi l'on a

$$\overline{O'C}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OO'}^2.$$

Le point O′ se trouvera tantôt sur OB, tantôt sur le prolongement de OB; dans chacun des deux cas, l'une des longueurs OA, OO′ sera égale à la demi-différence et l'autre à la demi-somme des distances O′A, O′B; il vient donc

$$\overline{O'C}^2 = \frac{\overline{O'A}^2 + \overline{O'B}^2}{2}.$$

73. — Problèmes : *Connaissant un segment d'une division syharmonique ainsi qu'une des extrémités ou le milieu de l'autre segment, construire ce dernier.*

Deux segments étant donnés sur une droite, en construire un troisième qui forme, avec eux, deux divisions syharmoniques, ou, *avec l'un, une division harmonique, et, avec l'autre, une division syharmonique.*

L'énoncé du second alinéa comprend cinq problèmes distincts, dont trois admettent chacun une solution unique. Les deux autres, quand ils sont possibles, admettent chacun deux solutions susceptibles de se confondre ; ces derniers sont ceux dans lesquels un des segments donnés, et un seul, doit jouer le rôle de segment secondaire. Le milieu du segment cherché se trouve alors sur une circonférence, lieu des points ayant des puissances égales et de signes contraires par rapport à deux cercles, ou par rapport à un cercle et à un point connus.

Deux segments secondaires d'un même primitif empiètent toujours l'un sur l'autre.

(*A suivre*)

CORRECTION
ET CLASSEMENT DES COPIES

Le Comité du journal corrige, annote, *classe* et retourne *franco* les copies que les abonnés à la *Correction des copies* lui enverront mensuellement. Les copies et épures doivent être envoyées *franco* de port dans le mois qui suit la publication des questions proposées au journal par le Comité.

Prix de l'abonnement a la correction. . **10** fr. »»

Peuvent s'abonner non seulement les abonnés du journal, mais encore tous ceux qui désireront prendre part à la correction comparative.

Les copies et le montant de l'abonnement doivent être adressés à M. Mariaud, président du Comité, 3 rue Dubau, Paris-Passy.

Nota. — Tous les modes de payement sont admis : mandats-poste français, chèques, timbres-poste...

M. Mariaud se tient à disposition des lecteurs du *Journal de Mathématiques* et des abonnées à la correction tous les semedis de 7 heures à 11 heures du matin à son domicile, pour tous renseignements relatifs aux examens, concours et Ecoles du Gouvernement.

On peut demander ces renseignements par correspondance.

Le Président du Comité,
Georges MARIAUD.

Le Directeur-gérant,
Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTERAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées par le Comité aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE ST-CYR

ÉCRIT

MATHÉMATIQUES

36. — On donne une circonférence O et deux rayons rectangulaires fixes OA et OB. On considère un rayon variable OC qui décrit l'angle AOB et sur lequel on prend OM égal à la distance CD de C à OA.

On demande :

1° Le lieu de M ;

2° Le lieu de l'intersection des médianes du triangle OBM.

37. — On donne une surface conique de révolution à deux nappes dont le demi angle au sommet est 60°. On la coupe par deux plans perpendiculaires à l'axe et dont la distance est h. On obtient ainsi un tronc de cône. Calculer la distance x du sommet à la base la plus éloignée, sachant que le volume de ce tronc est dans un rapport donné m avec celui de la sphère dont le diamètre est h. Discussion.

ÉPURE

38. — Cadre 27 centimètres sur 45 centimètres. $\alpha\beta$ parallèle aux grands côtés du cadre ;

$\alpha X = 5$ millimètres ; $\alpha\gamma = 65$ millimètres ; $\gamma\delta = 90$ millimètres ; $o\gamma = 38$ millimètres ; $c\delta = 34$ millimètres.

Un cylindre a pour base dans le plan horizontal un cercle o. Les génératrices ont leurs projections horizontales parallèles à ob ; ab étant le côté du pentagone régulier inscrit.

Un prisme a pour base dans le plan horizontal un carré inscrit dans la circonférence c ; un des sommets du carré est le point δ. Les projections des arêtes sont perpendiculaires à ob, ces deux solides sont limités à un même plan horizontal passant par le point M situé sur la génératrice du cylindre qui passe en b, la projection m de M est telle que $bm = 18$ centimètres.

Un plan parallèle aux arêtes du prisme et aux génératrices du cylindre a sa trace horizontale parallèle à $\alpha\beta$.

1° On demande de représenter la projection horizontale de l'ensemble des deux solides formant un seul corps opaque.

2° On représentera le cylindre entaillé en le transportant parallèlement aux petits côtés du cadre de 130 millimètres.

3° On représentera le prisme entaillé en le transportant parallèlement aux grands côtés du cadre de 215 millimètres.

4° On représentera le solide commun transporté de 215 millimètres parallèlement aux grands côtés du cadre et de 120 millimètres parallèlement aux petits côtés.

CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

1° La projection d'un segment de droite ayant 12 841^{m},50 pour longueur, mesure 8 210^{m},63 ; on demande de calculer l'angle du segment avec l'axe de projection.

2° Un point B a pour coordonnées

$$x = 2\,841^{m},35,$$
$$y = 10\,432^{m},50.$$

On demande de calculer les éléments du triangle AOB.

QUESTIONS AYANT ÉTÉ PROPOSÉES A L'ORAL

A RÉSOUDRE PAR LES CANDIDATS

40. — Peut-on mener une sphère tangente aux six arêtes d'un tétraèdre. — Discussion.

41. — On donne une demi-circonférence de diamètre AOB. Sur le diamètre AB ou sur son prolongement on donne un point S, déterminer dans la demi-circonférence une corde CD, parallèle à AB, et telle que les surfaces engendrées par la rotation, autour de AB des droites SC et CD soient proportionnelles. — Discussion.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

42. — Etant donnée une circonférence tangente aux deux côtés d'un angle de 60° mener une troisième tangente qui forme avec

les deux autres une surface égale à $5\pi R^2$. Discussion. — Cas du maximum et du minimum.

LÉOPOLD MASSIP,

Professeur à la
« Société d'enseignement moderne ».

43. — Inscrire dans une sphère un cône ayant pour base AB et dont le volume soit égal à celui du segment ABCD.

44. — Calculer à 0,001 près le rapport

$$\frac{\sin 75^\circ + \sin 30}{\sin 75 - \sin 30}.$$

PHYSIQUE ET CHIMIE

45. — Un ballon de volume V renferme un gaz de densité d à la pression H. Un second ballon de volume V' renferme un autre gaz de densité d' à la pression H'. On met les deux ballons en communication et l'on demande de calculer : 1° la force élastique du mélange, 2° le rapport entre les poids des deux gaz qu'il contient.

Données numériques :

$V = 10^l$ $V' = 3^l$ $d = 1$ (air), $d' = 0{,}069$ (hydrogène)
$H = 380$ millimètres, $H' = 2$ atmosphères.

46. — Définition de la densité des corps solides. — Méthode du flacon pour la déterminer.

47. — Préparations et usages du soufre.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

MATHÉMATIQUES

48. — (*Obligatoire*). Etant donnée une progression géométrique de raison x, on considère trois termes consécutifs de cette progression. On fait leur somme puis de cette somme on retranche le terme du milieu. Etudier la variation du rapport de la première expression à la seconde quand x varie.

49. — (*Au choix*). Théorie du plan incliné.

50. — Conditions de sensibilité et de justesse de la balance.

51. — Bascule de Quintenz.

PHYSIQUE

57. — (*Obligatoire*). Deux sphères métalliques, dont les densités sont 5 et 10 ont même poids P dans le vide. On les suspend aux extrémités d'un levier et on les fait plonger dans l'eau. Quel doit être le rapport $\frac{l}{l'}$ des deux bras de levier pour qu'il y ait équilibre.

58. — (*Au choix*). Démontrer le principe d'Archimède.

59. — Conditions d'équilibre des corps flottants.

60. — Détermination expérimentale du volume d'un corps solide.

IV. — AU BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

MATHÉMATIQUES

61. — (*Obligatoire*). x variant de $-\infty$ à $+\infty$, étudiei les variations de :

$$\frac{3x^2 - 8x + 7}{5n^2 + 4x + 2}.$$

62. — (*Au choix*). Composition de deux forces parallèles et de sens contraires.

63. — Valeur en grandeur et en direction de la résultante de deux forces concourantes.

64. — Montrer qu'un couple ne peut avoir de résultante.

PHYSIQUE

65. — (*Obligatoire*). Un aréomètre à graduation uniforme (genre Baumé) marque 0 degré dans l'eau pure à 0 degré, 40 degrés dans un certain liquide de densité 1,52 à la même température. A quelle division affluera-t-il dans ce dernier liquide à la température de 60 degrés?

Le coefficient de dilatation cubique du verre est 0,000026 ; celui du liquide 0,000836.

On néglige les effets de capillarité et l'on admet que la densité de l'eau à 0° ne diffère pas sensiblement de 1.

66. — (*Au choix*) *a*). Spectres solaires. — Spectres des différentes sources lumineuses.

b) Chaleur rayonnante. — Emission, réflexion, transmission et absorption.

c) Principes de la photométrie. — On donnera un exemple de comparaison de deux sources lumineuses, au moyen d'un photomètre seulement.

V. BACCALAURÉAT (LETTRES. — SCIENCES)

MATHÉMATIQUES

67. — (*Obligatoire*) a et b, étant les coordonnées d'un point M et

(1) $$(a + 2)x + (a + 3b + 5)y + 3 = 0,$$

(2) $$(a + 2)x - (2a + b - 2)y - 2 = 0,$$

les équations de deux droites rapportées aux mêmes axes rectangulaires, trouver le lieu des positions que doit occuper le point M dans le plan pour que ses coordonnées mises dans les équations (1) et (2) les deux droites qu'elles représentent soient parallèles. Trouver les coordonnées du point M pour lesquelles les deux droites coïncident.

68. — (*Au choix*). 1° Définition d'une fonction continue d'une variable et démontrer que la fonction $y = ax^2 + bx + c$ est continue de $-\infty$ à $+\infty$.

2° Indiquer comment on représente une droite et un plan en géométrie cotée, et, trouver l'intersection d'une droite et d'un plan donnés en projections cotées par leurs échelles de pente.

3° Ramener à un système de trois forces passant par trois points choisis arbitrairement dans un corps solide, un système de n forces appliquées en différents points de ce corps solide. Puis ramener ce système de trois forces à un autre de deux forces dont l'une passe par l'un des trois points précédents.

PHYSIQUE

69. — (*Obligatoire*). On manœuvre le piston d'une machine pneumatique. Le récipient est rempli d'air à la pression de 760 millimètres de mercure et à la température de 0°. Le volume de ce récipient est de 7 530 centimètres cubes. On demande : 1° le poids de l'air extrait quand la pression est réduite à 84 millimètres ; 2° le poids de l'air contenu dans le récipient à la même pression (poids du litre d'air à 0°, sous la pression de une atmosphère : $1^{gr},293$.

70. — (*Au choix*). 1° Lois de la chute des corps et machine d'Atwood ;

2° Pendule. — Applications ;

3° Poids spécifiques des solides.

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

71. — *a*) Dans un hôtel des monnaies on a frappé de la monnaie d'argent pour une valeur de 100 000 francs. Les $\frac{19}{20}$ de cette fabrication sont en pièces de 5 francs, au titre de 900 millièmes, le reste est fabriqué en pièces divisionnaires. On demande : 1° le poids de l'argent pur employé ; 2° le montant des frais de fabrication des pièces de 5 francs au tarif de $1^{fr},50$ par kilogramme d'argent monnayé.

72. — *b*) Les volumes engendrés par un rectangle tournant successivement autour de ses côtés sont de 10 mètres cubes et de 19 mètres cubes. Trouver la longueur de la diagonale de ce rectangle.

73. — *c*) Calculer par logarithmes

$$x = \frac{\sqrt[7]{\overline{2,35}^3}\; 0,001 . \left(\frac{372}{25}\right)^2}{\sqrt[3]{89\,543}}.$$

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

ÉCOLES SUPÉRIEURES DE COMMERCE RECONNUES PAR L'ÉTAT

CONCOURS D'ENTRÉE DU 11 OCTOBRE 1897

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(3 HEURES)

I. — ARITHMÉTIQUE

I. Trois lingots d'argent ont pour titres : 0,95 pour le premier, 0,80 pour le second et 0,53 pour le troisième.

Le poids du premier lingot et le poids du second sont proportionnels à 4 et à 5.

Le poids du troisième lingot est triple du poids du second lingot.

Les trois lingots fondus ensemble forment un lingot total pesant 2880 grammes.

On demande :

1° Quel poids de cuivre ou quel poids d'argent pur faut-il ajouter au lingot total pour fabriquer un alliage pouvant servir à frapper des pièces de 1 franc en argent ?

2° Quel sera le nombre de pièces de 1 franc frappées ?

II. Un commanditaire a placé dans une maison de commerce une certaine somme d'argent à intérêts simples à un certain taux.

Si la commandite était retirée au bout de 11 mois, le commanditaire toucherait 69 664 francs. Si la commandite était retirée au bout de deux ans et demi, le commanditaire toucherait 73 920 francs.

Calculer la somme placée et déterminer le taux du placement.

Nota. — La résolution de ces problèmes par l'arithmétique est obligatoire ; toute solution algébrique sera considérée comme nulle. Les candidats sont astreints à faire figurer tous les calculs *en marge de la copie.*

II. — ALGÈBRE

Démontrer que l'équation

$$\frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 9x + 14} = \frac{x - 4}{x - 2},$$

est une identité.

III. — CALCUL LOGARITHMIQUE

$$\sqrt[7]{\left[\frac{6878^3 \times \sqrt[3]{0{,}01}}{\frac{5}{7} \times 725^6 \times \sqrt{0{,}678}}\right]^4}$$

Chaque candidat calculera cette expression avec l'approximation que comporte la table dont il se sert.

Il sera tenu compte de la bonne disposition et de l'ordre des calculs.

DEUXIÈME PARTIE

Pour mémoire. — Cette partie sera remplie à partir du prochain numéro.

TROISIÈME PARTIE

Questions diverses

CERCLES ET DROITES ALLOTROPES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite*, voir le numéro d'octobre)

L'ÉLONGATION PAR RADIANT

71. — Un point, dit *radiant*, et un cercle fixe étant donnés, nous appelons *élongation* d'un point variable le rayon du cercle qui a ce point pour centre, et dont l'axe radical, par rapport au cercle fixe, est issu du radiant. Pour chaque position du point variable, l'axe radical est déterminé, puisqu'il doit être perpendiculaire à la droite passant par ce point et par le centre du cercle fixe.

Lorsque l'axe radical rencontre le cercle fixe, l'élongation est égale à la droite qui joint le point variable à l'une des extrémités de la corde d'intersection. Supposons que l'axe radical soit extérieur au cercle fixe; construisons leurs nœuds [**7**], lesquels devront être les mêmes que pour l'axe radical et le cercle variable. Si le point variable est en dehors du *cercle nodal*, c'est-à-dire du cercle décrit sur la ligne des nœuds comme diamètre, la tangente menée de ce point à ce cercle donnera l'élongation. Dans le cas contraire, au lieu de considérer l'élongation, qui serait imaginaire, nous considérerons, sous le nom de *corde d'élongation*, la corde principale du point variable dans le cercle nodal. Dans les deux cas, la puissance du point variable par rapport à ce cercle sera sa *puissance d'élongation*.

L'élongation sera dite *centrale* lorsque le radiant occupera le centre du cercle fixe. Le mode particulier d'élongation ainsi défini est celui que nous avons déjà rencontré dans l'étude des cercles allotropes [**66**].

75. — *L'axe radical de deux cercles variables passe par le radiant.*

Ces deux cercles, avec le cercle fixe, ont en effet le radiant pour centre radical.

Il suit de là que, si le point variable décrit une ligne droite, les cercles variables, pris deux à deux, auront le même axe radical. Lorsque l'un d'entre eux sera rencontré par cet axe, ils le seront tous, et aux mêmes points, que nous appellerons *nœuds d'élongation*. On peut obtenir ces nœuds en abaissant, du radiant, une perpendiculaire sur la droite des points variables, et prenant ses intersections avec la circonférence qui a son centre au pied de cette perpendiculaire. Les nœuds une fois construits, pour avoir l'élongation d'un point quelconque de la droite, il suffira de le joindre à l'un des nœuds.

76. Lemme. — *L'axe radical de deux cercles est équidistant des polaires de leurs centres*, la polaire du centre de chaque cercle étant prise par rapport à l'autre cercle.

En effet, la distance du milieu de la ligne des centres à l'axe radical et la distance du même point à la droite équidistante des deux polaires sont toutes deux égales au demi-quotient de la différence des carrés des rayons par la distance des centres.

77. — *Quand le radiant et le centre du cercle fixe se trouvent sur une même perpendiculaire à la droite des points variables, les nœuds d'élongation forment une division harmonique avec le centre du cercle fixe et le symétrique, par rapport au radiant, du pôle de la droite dans ce cercle.*

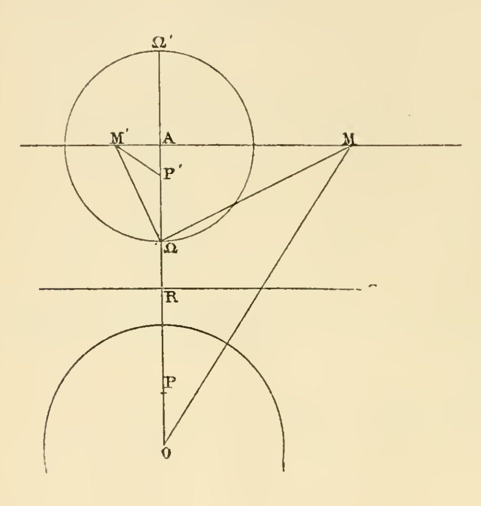


Fig. 37

Soient O (*fig.* 37) le centre du cercle fixe, AM la droite des points variables, A le pied de et la perpendiculaire abaissée de O sur AM, R le radiant, RS la perpendiculaire élevée en R sur OA. Les nœuds d'élongation Ω, Ω' se trouveront sur la circonférence variable de centre A, c'est-à-dire celle qui, avec le cercle fixe, aurait pour axe radical RS. Soient encore P le point de rencontre de OA avec la polaire de A dans le cercle fixe, et P' le symétrique de P par rapport à R. D'après le lemne précédent, P' appartiendra à la polaire de O dans la circonférence variable de centre A ; les points Ω, Ω' de cette circonférence sont donc conjugués harmoniques des points O, P'.

78. — *Quand le radiant et le centre du cercle fixe se trouvent sur une même perpendiculaire à la droite des points variables, on voit sous un angle droit, de chaque nœud d'élongation, la portion de la droite comprise entre l'un quelconque de ses points et la symétrique, par rapport au radiant, de la polaire de ce point.*

La polaire d'un point quelconque M (*fig.* 37) de la droite AM serait la perpendiculaire abaissée de P sur OM ; sa symétrique par rapport à R sera P'M' perpendiculaire aussi à OM ; M' étant le

point de rencontre de $P'M'$ avec AM, il s'agit de démontrer que l'angle $M\Omega M'$ est droit. Puisque les deux segments $\Omega\Omega'$, OP' sont conjugués harmoniques [**77**], on a $\overline{A\Omega}^2 = AO.AP'$; mais les deux triangles semblables AOM, $AM'P'$ donnent $AO.AP' = AM.AM'$; il vient donc $\overline{A\Omega}^2 = AM.AM'$, ce qui prouve que le triangle $M\Omega M'$ est rectangle en Ω.

79. — Les nœuds tels qu'ils ont été définis à propos des cercles bitangents de première espèce [**7**], à propos des cercles bitangents de seconde espèce [**39**], enfin à propos des cercles allotropes [**66**], répondent à trois positions particulières du radiant sur la perpendiculaire menée à la droite des points variables par le centre du cercle fixe.

1° La droite AM (*fig.* 38) étant extérieure au cercle, prenons son pôle P pour radiant. Les tangentes aux extrémités de toute corde passant par P se coupant sur AM, l'élongation d'un point quelconque de AM sera la tangente menée de ce point au cercle fixe.

Ici, les nœuds Ω, Ω' sont conjugués harmoniques de O, P [**77**]. Ils le sont aussi des extrémités C, D du diamètre perpendiculaire à AM, car, B désignant l'une des extrémités de la corde principale de P, ou, ce qui revient au même, le point de contact de l'une des tangentes issues de A, on aura $\overline{A\Omega}^2 = \overline{AB}^2 = AC.AD$.

De chaque nœud, on voit sous un angle droit la portion de la droite comprise entre l'un quelconque de ses points et la polaire de ce point dans le cercle [**78**].

2° La droite AM (*fig.* 39) rencontrant le cercle, prenons, pour radiant, le pied A de la perpendiculaire abaissée, sur cette droite, du centre O du cercle fixe. L'élongation de A sera la demi-corde principale AB, et les nœuds se trouveront en Ω, Ω', à des distances de A égales à AB. Ils formeront avec O et le symétrique, par rap-

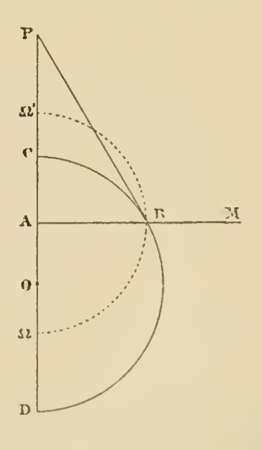


Fig. 39.

port à A, du pôle P de AB, une division harmonique [**77**]; par conséquent ils occupent les extrémités du segment primitif dans une division syharmonique dont le segment secondaire est OP. Ils jouent le même rôle dans une autre division syharmonique ayant, pour segment secondaire, le diamètre CD perpendiculaire à AM. On a en effet $\overline{A\Omega}^2 = \overline{AB}^2 = AC.AD$.

De chaque nœud, on voit sous un angle droit la portion de la droite comprise entre l'un quelconque de ses points et la symétrique de la polaire de ce point par rapport au pied de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle fixe sur la droite [**78**].

3° Quelles que soient les positions relatives de AM (*fig.* 40) et du cercle fixe, prenons, pour radiant, le centre O de ce cercle, ce qui correspond à l'élongation centrale. Si B est l'une des extrémités du diamètre parallèle à AM, l'élongation de A sera égale à AB, et les nœuds Ω, Ω' se trouveront à des distances de A égales aussi à AB. Soit P le pôle de AM; prenons $OP' = OP$; Ω, Ω' seront conjugués harmoniques de O, P' [**77**]; ils forment donc une division harmonique avec le centre du cercle et le sypôle de la droite. La ligne $\Omega\Omega'$, qui les joint, est aussi le segment secondaire d'une division syharmonique ayant pour segment primitif le diamètre CD perpendiculaire à AM; on a en effet $\overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 = O\Omega.O\Omega'$.

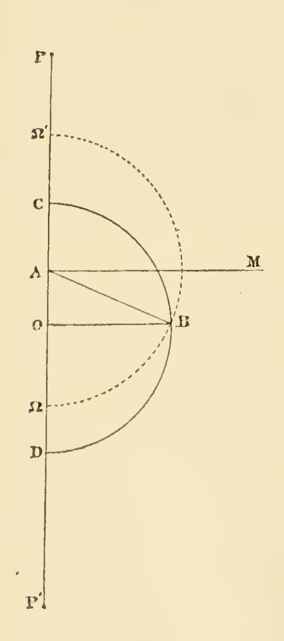


Fig. 40.

De chaque nœud, on voit sous un angle droit la portion de la droite comprise entre l'un quelconque de ses points et la sypolaire de ce point dans le cercle [**78**].

80. — L'emploi des nœuds nous a facilité la démonstration des propriétés des cercles bitangents aux coniques; il conduit à la résolution de divers problèmes relatifs à ces cercles; enfin, il

fournit des réponses immédiates aux questions dans lesquelles il s'agit des élongations de deux points seulement ou de celles de plusieurs points appartenant à une même droite. Pour énoncer plus rapidement quelques-unes de ces questions prises comme exemples, nous supposerons que *la droite ne rencontre pas le cercle*, et que le radiant coïncide avec le pôle de cette droite, de sorte que l'élongation de chaque point sera la tangente qui en est issue.

Démontrer que la distance de deux points est comprise entre la somme et la différence des tangentes menées de ces points à un même cercle.

Étant donnés deux cercles et une droite, trouver le point de cette droite pour lequel la somme des tangentes menées aux deux cercles est la plus petite possible, et celui pour lequel la différence des tangentes est la plus grande possible.

Démontrer que le carré de la distance de deux points situés chacun sur la polaire de l'autre par rapport à un cercle est égal à la somme des carrés des tangentes issues de ces deux points.

Former la relation qui doit exister entre les distances mutuelles de trois points en ligne droite et les longueurs des tangentes menées de ces points à un même cercle.

81. — *Le lieu des points d'égale élongation par rapport à deux cercles fixes est une droite perpendiculaire à celle qui joint les deux radiants.*

En effet, considérons deux points du lieu, les cercles variables décrits de ces points comme centres avec leurs élongations pour rayons, enfin la droite qui les joint. L'axe radical des deux cercles variables doit contenir les deux radiants [**75**] ; deux points quelconques du lieu se trouvent donc sur une même perpendiculaire à la droite des radiants.

Dans le cas des élongations centrales, le lieu des points d'égale élongation est symétrique de l'axe radical des deux cercles donnés par rapport au milieu de la distance de leurs centres.

Les lieux des points d'égale élongation par rapport à trois cercles et à trois radiants pris deux à deux se coupent en un même point.

L'intersection des deux axes radicaux qui correspondent à tout

point d'égale élongation par rapport à deux cercles fixes se trouve sur l'axe radical de ces deux cercles.

Lorsque les deux radiants se confondent, tout point du plan a la même élongation par rapport à deux cercles donnés, ou aucun point ne jouit de cette propriété, suivant que le radiant commun est ou non situé sur l'axe radical des deux cercles.

82. — *Lorsque deux circonférences sont orthogonales, il y a égalité entre la puissance d'un point quelconque du plan par rapport à l'une et la puissance d'élongation du même point par rapport à l'autre et au centre de la première pris comme radiant.*

Soient O (*fig.* 41) le centre de la première circonférence, O' celui de la seconde, M le point considéré. Du radiant O, abaissons, sur O'M, la perpendiculaire ON et supposons d'abord que cette perpendiculaire rencontre la seconde circonférence ; si E est un des points d'intersection, M aura pour élongation ME.

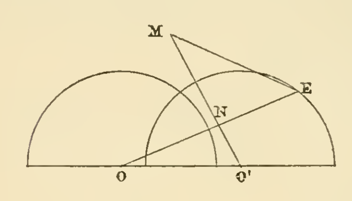


Fig. 41.

Les deux cercles se coupent orthogonalement, O' appartient à l'axe radical du premier et du point E ; cet axe radical est donc O'N, et, comme O'N contient M, la distance ME sera égale à la tangente menée de M à la première circonférence.

Supposons maintenant que ON (*fig.* 42) ne rencontre pas la seconde circonférence. Imaginons le cercle nodal qui se rapporte à cette circonférence et à ON, c'est-à-dire celui qui a N pour centre, et, pour rayon la tangente menée de N à la dite circonférence. Ce cercle et le premier des deux cercles donnés coupant orthogonalement le second, leur axe radical doit passer par O' ; il est donc O'N, et contient M. D'après cela, M a la même puissance dans le premier cercle donné et dans le cercle

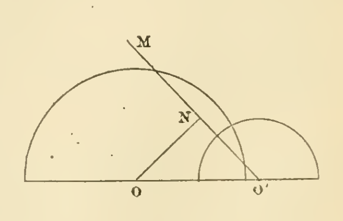


Fig. 42

nodal; or, sa puissance dans le cercle nodal est précisément sa puissance d'élongation par rapport au second cercle donné et au radiant O [**74**].

83. *Deux circonférences étant décrites, l'une sur le segment primitif, l'autre sur le segment secondaire d'une division syharmonique comme diamètres, il y aura égalité entre l'élongation centrale d'un point quelconque du plan par rapport à la première, et l'élongation du même point par rapport à la première, et l'élongation du même point par rapport à la seconde et au centre de la première pris comme radiant.*

Soient AB (*fig.* 43) le segment primif, O son milieu, CD le segment secondaire, OI la demi-corde commune aux deux circonférences, laquelle passe par O [**70**] Ce point sert de radiant pour les deux élongations et il est situé sur l'axe radical des deux cercles; donc les deux élongations sont égales [**81**].

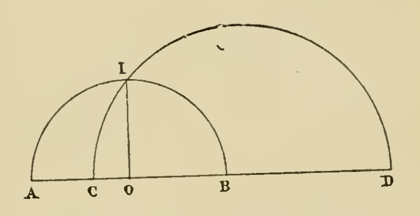


Fig. 43

84. — *Tout point de l'axe focal d'une conique, indéfiniment prolongé, est le centre d'une infinité de cercles à chacun desquels correspondent un point et une droite tels que, le point étant pris pour radiant, il y ait un rapport égal à l'exentricité entre l'élongation, par rapport au cercle, d'un point quelconque de la conique et la distance du même point à la droite.*

(*A suivre*).

CORRECTION
ET CLASSEMENT DES COPIES

Le Comité du journal corrige, annote, *classe* et retourne *franco* les copies que les abonnés à la *Correction des copies* lui enverront mensuellement.

Les copies et épures doivent être envoyées *franco* de port dans le mois qui suit la publication des questions proposées au journal par le comité.

PRIX DE L'ABONNEMENT ANNUEL A LA CORRECTION. . **10** fr. »»

Peuvent s'abonner non seulement les abonnés du journal, mais encore tous ceux qui désireront prendre part à cette correction comparative.

Les copies et le montant de l'abonnement doivent être adressés à M. MARIAUD, président du Comité, 61, rue de Passy, Paris-Passy.

NOTA. — Tous les modes de payement sont admis : mandats postes français, chèques, timbres-postes...

M. Mariaud se tient à la disposition des lecteurs du « Journal de Mathématiques » et abonnés à la correction tous les samedis de 7 heures à 11 heures du matin à son domicile, pour tous renseignements relatifs aux examens, concours et Ecoles du Gouvernement.

On peut demander ces renseignements par correspondance.

Le Président,
GEORGES MARIAUD.

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE St-CYR

MATHÉMATIQUES

74. — Résoudre le système :

$$x^2 - y\sqrt{xy} = a^2,$$
$$y^2 - x\sqrt{xy} = b^2.$$

Léopold Massip,
Professeur à la
« Société d'enseignement moderne ».

75. — Trouver le lieu des points d'où l'on voit trois sphères données sous un même angle donné.

ÉPURE

76. — Un cercle de centre O dans le plan de comparaison est la base d'un cylindre oblique limité au plan vertical qui passe par CC_1 (CC_1 parallèle aux petits côtés du cadre). On donne le point B dans le plan de comparaison. Ce point est l'un des sommets du losange, circonscrit au cercle. On considère le prisme formé par les quatre plans tangents au cylindre et passant par les quatre côtés du losange ; 2° un cylindre horizontal d'axe AA_1 (AA_1 parallèle aux petits côtés du cadre) est tangent au plan vertical CC_1 et limité à deux plans perpendiculaires au plan vertical qui passe par SS_1 (SS_1 parallèle aux petits côtés du cadre et placé suivant le petit axe de la feuille) et inclinés de 30° sur le plan de comparaison. On demande l'intersection du cylindre horizontal et du prisme ; 2° la construction d'un point d'intersection et de la tangente en ce point.

Données numériques : Cadre, 27 centimètres sur 45 centimètres S et S_1 sont sur les côtés du cadre, l'axe du cylindre est situé dans un plan vertical perpendiculaire à SS_1 et part du point O, $O\omega = O_1\omega = 0^m,13$ (ω sur SS_1 tel que OO_1 soit perpendiculaire à SS_1).

Le rayon du cercle O est de 2 centimètres 5 millimètres BB_1

perpendiculaire à SS_1 égale 17 centimètres, $B_1S_1 = 8$ centimètres (S_1 à droite de la feuille et sur le côté du cadre). La pente de l'axe du cylindre O est 1. La côte de l'axe AA_1 du cylindre horizontal est inférieure de 3 centimètres à la côte du point O_1 (O_1 étant la trace de l'axe OO_1 sur le plan vertical CC_1. Le rayon du cercle horizontal est $0^m,045$.

LÉOPOLD MASSIP.

CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

77. — Etant donnée l'équation :

$$89785 = 89524,67 \cos x + 24508,75 \sin x.$$

On propose : 1° d'établir une formule logarithmique qui fasse connaître toutes les valeurs de l'arc x.

2° De calculer ces valeurs à moins de $\frac{1}{10}$ de seconde, en écartant celles qui ne sont pas comprises dans le premier quadrant.

QUESTIONS POSÉES A L'ORAL

78. — Soit un carré. On le divise en quatre petits carrés par des parallèles aux côtes tracées suivant les axes ; dans l'un des quatre carrés on inscrit un cercle tangent aux quatre côtes. Ce cercle représente un trou fait à l'emporte-pièce et si l'on suppose la figure en métal, trouver le centre de gravité du système.

79. — Résoudre l'équation

$$\sin^4 x - \sin^3 x + 2m \sin^2 x - \sin x + 1 = 0.$$

Discuter la nature des racines de cette équation suivant les diverses valeurs de m.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

80. — Déterminer les côtés d'un trapèze de périmètre donné, inscrit dans une circonférence donnée de manière que l'un de ces côtés parallèles soit un diamètre de la circonférence. Discuter la solution trouvée.

81. — Déterminer les maxima et minima des fonctions :

$$\frac{3x-2}{5x^2+1}, \quad x - 3 + \frac{4}{x-5}, \quad \frac{3x^2+1}{5x-3}, \quad \frac{a}{x} + \frac{a}{a+x}.$$

82. — Calculer les racines de l'équation

$$\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2.$$

PHYSIQUE ET CHIMIE

83. — Un tube de verre ayant à l'intérieur la forme d'un cylindre a un diamètre intérieur de 2 millimètres à 0° et renferme une colonne de mercure, dont la longueur à cette température est de 2 décimètres. On demande quelle serait à la température de 20° la nouvelle longueur de la colonne liquide.

Le coefficient de dilatation cubique du mercure est $\frac{1}{5550}$, celui du verre $\frac{1}{38700}$.

84. — Combien faut-il mettre de fer et d'acide sulfurique monohydraté, dans des tonneaux à moitié pleins d'eau pour préparer 100 mètres cubes d'hydrogène saturé d'humidité à 22° sous la pression de 766 millimètres. La force élastique maximum de la vapeur d'eau à 22° est de $19^{mm},6$. Quel est le poids du sulfate de fer cristallisé que l'on peut obtenir par l'évaporation de la liqueur.

QUESTIONS POSÉES A L'ORAL

85. — On donne une circonférence et une tangente à cette circonférence au point A, on mène la corde BC parallèle à la tangente en A. Des points B et C on abaisse des perpendiculaires sur la tangente en A, et on détermine ainsi un rectangle dont l'un des côtés est BC, déterminer la corde BC de façon que ce rectangle ait un périmètre donné. Discuter l'équation obtenue.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

86. — (*Obligatoire*) : On considère l'arc d'une circonférence de $438^m,35$, intercepté par l'angle au centre de 45° et on le fait tourner autour de l'un des rayons qui le limitent. Calculer : 1° l'aire de la zone engendrée ; 2° le volume du secteur sphérique ; 3° le volume du segment de la sphère.

87. — (*Au choix*) : Théorie du treuil.

88. — Centre de gravité d'un arc de cercle.

89. — Théorème de Varignon.

PHYSIQUE

90. — (*Obligatoire*) : On a un cylindre d'acier de 22 centimètres de longueur qu'on voudrait lester avec un cylindre de platine de même diamètre de manière qu'il se tint verticalement flottant dans du mercure, la partie non plongée du cylindre d'acier n'étant que de 2 centimètres.

Quelle longueur faut-il donner au cylindre de platine ?

91. — (*Au choix*) : Lunette astronomique.

92. — Grossissement de la loupe.

93. — Détermination du centre optique dans les différentes lentilles.

QUESTIONS POSÉES A L'ORAL

94. — Vérifiez que si x, y, z sont en progression arithmétique, il en est de même de $x^2 + xy + y^2$, $x^2 + xz + z^2$, $y^2 + yz + z^2$.

95. — Maximum et minimum de $\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}$.

IV. — AU BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

96. — (*Obligatoire*) : Sur une droite AB de longueur a, on prend un point M à la distance $AM = x$. On construit sur AM le triangle équilatéral AMN ; puis on élève en N la perpendiculaire NP sur MN et, en B la perpendiculaire BP sur AB. Calculer l'aire du quadrilatère ANPB. Cette surface passe-t-elle par un maximum ou un minimum quand le point M varie entre A et B ?

97. — (*Au choix*) : Etablir la formule qui donne le volume du tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles.

98. — Volume du tronc de prisme.

99. — Mesure des angles dièdres.

PHYSIQUE

100. — (*Obligatoire*) : Un morceau de fer, plongé dans un vase plein d'eau en a fait sortir dix grammes ; mis dans un vase plein de mercure, il y flotte en déplaçant 78 centimètres cubes de ce dernier liquide. On demande le poids, le volume, la densité du morceau de fer.

101. — (*Au choix*) : Décrire la sirène.

102. — Intervales musicaux. — Gamme.

103. — Vibrations transversales des cordes ; lois expérimentales.

QUESTIONS POSÉES A L'ORAL

104. — Simplifier l'expression :

$$\frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} - 2xy^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + yx^{\frac{1}{3}} - xy^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{4}{3}}}.$$

105. — Résoudre :

$$\frac{x-a}{a^2+4ab+3b^2} - \frac{x-b}{a^2-ab-6b^2} = \frac{x}{a^2-9b^2} - \frac{x+a-b}{a^2+4ab+3b^2}.$$

V. BACCALAURÉAT (LETTRES. — SCIENCES)

106. — (*Obligatoire*) : Construire les lignes qui correspondent aux formules

$$x = \sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad x = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \qquad x = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}.$$

107. — (*Au choix*) : Intersection d'une droite et d'une parabole.

108. — Théorème de Dandelin.

109. — Projection orthogonale du cercle.

PHYSIQUE

110. — (*Obligatoire*) : On demande quelle différence il y a entre le poids de 10 litres d'air sec à la température de 10° et à la pression de $0^m,76$ et le poids de 10 litres d'air sec à la température de 15° et à la pression de $0^m,75$. Le litre d'air sec à 0° et à la pression $0^m,76$ pèse $1^{gr},293$, le coefficient de dilatation de l'air est de 0,00367.

111. — (*Au choix*) : Machine pneumatique.

112. — Siphon.

113. — Electromètre de Thomson.

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

114. — Une lampe modérateur dépense 28 grammes d'huile par heure et donne une lumière égale à celle de 6 bougies environ. L'huile vaut $1^{fr},60$ le kilog ; la mèche et l'entretien coûtent $0^{fr},004$ par heure ; 485 grammes de bougie donnent 50 heures d'éclairage et coûtent $1^{fr},40$.

A-t-on avantage de se servir de la lampe modérateur ? et de combien par heure ?

2° Une personne qui n'a besoin que de la lumière donnée par une bougie perdrait-elle en faisant usage de la lampe modérateur ? et combien par heure ?

115. — Les rayons de la lune, de la terre, et du soleil étant proportionnels aux nombres $\frac{3}{11}$, 1 et 708,5, tróuver le rapport des distances du centre de la terre au centre des deux autres astres, lorsque l'on suppose les centres de ces 3 globes sur l'axe d'un cône de révolution qui leur est tangent ; considérer le cas où les trois astres sont tangents à une même nappe, et celui où la terre étant située dans une nappe les deux autres astres sont dans la nappe opposée.

116. — Calculer par logarithmes

$$x = \frac{1}{100} . 0{,}235879 \sqrt[7]{(0{,}01119)^3} .$$

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

117. — Un homme âgé de 30 ans possède une maison valant 200 000 francs, qui rapporte, tous frais déduits 5 % de sa valeur. Or, chaque année il dépense non seulement son revenu, mais encore il emprunte 2 000 francs à 5 %. Cet homme est mort à l'âge de 72 ans. On demande combien de temps il a encore vécu après sa ruine complète ?

NOTA. — *La résolution des problèmes par l'arithmétique est obligatoire ; toute solution algébrique est considérée comme nulle. Les candidats sont astreints à faire figurer tous les calculs en marge de la copie.*

118. — *Algèbre :* Transformer l'expression :

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x}$$

en un autre qui ne contienne que deux radicaux simples.

119. — Calculer par logarithmes

$$x = \left[\frac{4\sqrt[3]{573,892} - 3\sqrt[5]{678,92}}{45\sqrt{63456} - 3\sqrt[3]{6,789}}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

Ont résolu les questions du numéro d'octobre :

I. *A l'École de Saint-Cyr.* — MM. de Géransac à Rouen, Martinard à Périgueux, Laplanche à Perpignan (tout l'examen), Dubuy à Rodez, Paul Lion à Tarbes (la question de mathématiques), Bardin à Lille a envoyé une épure exacte, Tarnyés à Figeac, Vincent à Beauvais (calcul trigonométrique).

II. *A l'Institut Agronomique.* — MM. Vaucant à Montpellier, Teysserac à Cambrai, Albeski à Brest, Mironyl à Bastia (tout l'examen), Maurice Destins (la question 10 seulement).

III. *Au Baccalauréat Lettres Mathématiques.* — MM. Maurice Destins, Lugan à Liège, Mock Léon à Blois (tout l'examen).

IV. *Au Baccalauréat de l'Enseignement Moderne,* — MM. Vicq à Flaujac, Brunel à Périgueux, Trespoux à Gap (tout l'examen), Maurice Destins (la question 21).

V. *Aux Écoles d'Agriculture.* — MM. Paulin Duval à Agen (tout l'examen), Tassart à Nancy, Martin à Hozelerauck (le calcul logarithmique).

Nota. — Les solutions de ces questions seront données quand le classement des abonnés à la correction des copies sera terminé.

TROISIÈME PARTIE

CERCLES ET DROITES ALLOTROPES

Par M. **A. Tissot**

(*Suite et fin*, voir le numéro de novembre)

Pour construire un de ces cercles, connaissant le point de l'axe qui doit lui servir de centre, il suffit de mener à la conique un

cercle bitangent, à contacts réels ou imaginaires, ayant son centre sur le même axe, et laissant en dehors de lui le centre donné. La tangente au cercle bitangent issue de ce dernier point sera le rayon du cercle demandé. On prendra comme radiant le centre du cercle bitangent, et, pour droite correspondante, celle des contacts de ce cercle avec la conique [**82**].

Il y a une propriété analogue pour les points du second axe. Ici le rapport constant au lieu d'être égal à l'excentricité sera celui de c à b. De plus, s'il s'agit d'une ellipse, ce n'est pas l'élongation qui devra figurer dans l'énoncé, mais la demi-corde d'élongation ; enfin, il y aura exception pour les points compris entre les sommets du petit axe.

Revenons aux cercles qui doivent avoir leurs centres sur l'axe focal. Pour construire chacun d'eux, au lieu d'un cercle bitangent, on peut employer un cercle allotrope; les extrémités du diamètre de ce cercle perpendiculaire à l'axe donneront des points du cercle demandé [**83**]. La droite qui correspondra au cercle obtenu sera une droite allotrope, par conséquent située en dehors ou en dedans de l'intervalle des deux directrices suivant que la courbe sera une ellipse ou une hyperbole ; le contraire avait lieu pour les droites de la première solution.

Supposons encore que l'on donne deux droites perpendiculaires à l'axe focal, l'une entre les directrices, l'autre en dehors de l'intervalle de ces directrices. A chaque droite, faisons correspondre un point tel que les distances du centre de la conique à ce point et à la droite soient entre elles dans un rapport égal au carré de l'excentricité ; puis, construisons le cercle bitangent et le cercle allotrope dont chacun a pour centre l'un des points ainsi obtnnus. Sur l'axe, déterminons un segment qui soit conjugué harmonique du diamètre du premier cercle et syharmonique secondaire du diamètre du second cercle ; enfin, sur ce segment comme diamètre, décrivons une troisième circonférence. Par rapport à cette circonférence et à l'un ou à l'autre des deux points, pris maintenant comme radiant, l'élongation d'un point quelconque de la conique sera, avec la distance du même point à la droite correspondante, dans un rapport égal à l'excentricité.

La construction du segment à déterminer se trouve ici simplifiée parce que son milieu doit être équidistant des deux droites don-

nées. Lorsque ces droites se trouvent toutes deux en dedans ou toutes deux en dehors de l'intervalle des directrices, la question se ramène encore à l'un ou à l'autre des problèmes énoncés § **73**.

ÉLONGATION PAR POLAIRE

85. — Au lieu d'assujettir l'axe radical du cercle fixe et du cercle variable à passer par un point fixe, on peut lui imposer une autre condition, par exemple celle d'être la polaire du point variable par rapport à un cercle donné concentrique au cercle fixe, et que nous appellerons le *cercle de base.*

Dans l'élongation par radiant, le lieu du pied de l'axe radical variable, c'est-à-dire le lieu de l'intersection de cette droite avec la ligne joignant le point variable au centre du cercle fixe, était toujours une circonférence. Ici, ce lieu sera une transformée par rayons vecteurs réciproques de la courbe des points variables.

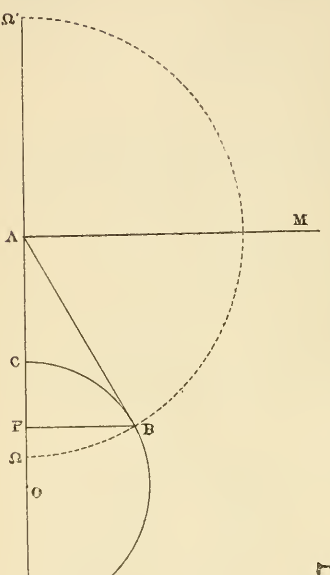
Si le cercle fixe est pris pour cercle de base, la puissance d'élongation d'un point quelconque [**74**] sera égale à sa puissance dans ce cercle. Comme élongation ou comme corde d'élongation, on retrouve alors, suivant que le point est extérieur ou intérieur au cercle, la tangente ou la corde principale déjà considérées à propos des cercles bitangents. L'élongation centrale correspond à un cercle de base de rayon nul.

86. — *L'axe radical de deux cercles variables passe par le centre du cercle fixe.*

Quel que soit le mode d'élongation, les élongations de deux points déterminés peuvent être assimilées à des élongations par radiant, le radiant étant pris à l'intersection des deux axes radicaux correspondants; ici, ce sera le pôle, par rapport au cercle de base, de la droite qui joint les deux points. La perpendiculaire à cette droite menée par le pôle sera donc l'axe radical des deux cercles [**75**]. Or, cette perpendiculaire contient le centre commun du cercle de base et du cercle fixe.

De là résulte, dans le cas de points variables situés en ligne droite, l'existence de nœuds d'élongation analogues à ceux du § **75**. Les propriétés des § **77** et **78** leur sont applicables, pourvu qu'au radiant, pris comme centre de symétrie, on substitue le pôle de la droite dans le cercle de base.

87. — *Le lieu des points de même élongation par rapport à deux cercles fixes est une perpendiculaire à la ligne des centres.*



La démonstration serait parallèle à celle du § **81.**

Il reste à examiner le cas où les deux cercles seraient concentriques. Appelons r, r' leurs rayons, S, S' ceux des cercles de base, ε, ε' les élongations d'un point quelconque M (*fig.* 44) par rapport aux deux cercles. Soient O leur centre commun et N l'intersection de OM avec la polaire de M dans le cercle de rayon S. On aura $\varepsilon^2 = \overline{MN}^2 = r^2 - \overline{ON}^2$,

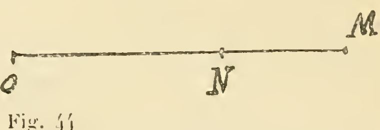


Fig. 44

d'où, en remplaçant MN par la différence entre OM et ON, et observant que le produit OM.ON est égal à S^2, $\varepsilon^2 = \overline{OM}^2 + r^2 - 2S^2$. On a de même $\varepsilon'^2 = \overline{OM}^2 + r'^2 - 2S'S^2$; suivant donc que la condition

$$r^2 - r'^2 = 2(S^2 - S'^2$$

sera ou non remplie; tout point du plan aura la même élongation par rapport aux deux cercles ou aucun ne jouira de cette propriété.

88. — *On déduit trois circonférences ayant pour centre commun le milieu du segment secondaire d'une division syharmonique, et passant, chacune des deux premières par une extrémité du segment primitif, la troisième par les extrémités du segment secondaire. Celle-ci étant prise comme cercle de base, la puissance d'élongation par polaire de tout point du plan relativement à l'une des deux premières circonférences sera égale à la puissance du même point dans l'autre.*

En effet, la notation du paragraphe précédent étant conservée, il viendra ici

$$S^2 = \frac{1}{2}(r^2 + r'^2)\ [\mathbf{72}], \qquad S' = r'\ [\mathbf{85}],$$

et la condition d'égalité entre les deux élongations se trouve satisfaite.

89. — *On décrit trois circonférences concentriques dont la troisième ait pour rayon la moyenne proportionnelle entre la plus courte distance des deux autres et la portion de droite allant du centre commun au milieu de cette plus courte distance. La troisième circonférence étant prise comme cercle de base, l'élongation par polaire d'un point quelconque du plan relativement à la plus grande des deux premières sera égale à l'élongation centrale du même point par rapport à l'autre.*

En effet, on a ici

$$S^2 = \frac{1}{2}(r^2 - r'^2), \qquad S' = o\ [\mathbf{85}],$$

et la condition du § **87** se trouve satisfaite.

On peut intervertir les rôles des deux circonférences, c'est-à-dire prendre l'élongation centrale relativement à la plus grande; seulement, pour l'autre circonférence, il faudra alors substituer, à l'élongation par polaire, l'élongation par sypolaire, dans laquelle on adopte, pour l'axe radical correspondant à chaque point variable, la sypolaire de ce point dans le cercle de base.

Les deux modes d'élongation, par polaire et par sypolaire, jouissent de propriétés analogues.

De ce paragraphe et du précédent, on peut tirer des conséquences relatives aux coniques, ainsi que nous l'avons fait en partant des § **82** et **83**. Ici, chacun des cercles que l'on aura à considérer sera concentrique avec le cercle bitangent ou avec le cercle allotrope correspondant.

ÉLONGATION PAR INDICE

90. — Pour terminer, nous dirons quelques mots d'un troisième mode d'élongation, celui dans lequel il y aurait un rapport constant, appelé *indice*, entre les distances du centre fixe à l'axe radical et au point variable. Ici, le lieu du pied de l'axe radical sera homothétique de celui du point variable.

Les deux lieux se superposent lorsque l'indice est 1 ; alors, pour tout point intérieur au cercle fixe, l'élongation se confond avec la demi-corde principale du point dans ce cercle : et, pour tout point extérieur, la demi-corde d'élongation est égale à la tangente menée au cercle. Dans les deux cas, la puissance d'élongation du point et sa puissance dans le cercle fixe sont égales et de signes contraires.

En annulant l'indice, on retrouve l'élongation centrale.

L'indice étant désigné par λ, appelons r le rayon du cercle fixe. La puissance π d'élongation d'un point M situé à une distance z du centre de ce cercle sera donnée par la formule

$$\pi = r^2 - (2\lambda - 1)z^2.$$

Considérons un second cercle fixe de rayon r', et soit λ' l'indice correspondant. Si λ' est égal à λ, le lieu des points d'égale élongation par rapport aux deux cercles sera une droite perpendiculaire à la ligne des centres. Il en sera de même, quels que soient λ et λ', du lieu des points pour chacun desquels le rapport des puissances d'élongation égale celui de $2\lambda - 1$ à $2\lambda' - 1$. Dans tout autre cas où le rapport des puissances d'élongation devra rester constant, le lieu des points variables sera une circonférence.

Nous allons maintenant supposer que les deux cercles sont concentriques. Soit d'abord $\lambda > \frac{1}{2}$. Appelons p la puissance de M dans le second cercle ; on aura $p = z^2 - r'^2$; si donc on prend $r = r'\sqrt{2\lambda - 1}$, il viendra $\pi = -(2\lambda - 1)p$, quel que soit M.

Soit ensuite λ négatif ou positif et plus petit que $\frac{1}{2}$. La formule ci-dessus s'écrira, si on y met les signes en évidence, et si l'on y remplace π par le carré de l'élongation ε,

$$\varepsilon^2 = r^2 + (1 - 2\lambda)z^2.$$

Appelons η l'élongation centrale de M dans le second cercle ; on aura $\eta^2 = z^2 + r'^2$; si donc on prend $r = r'\sqrt{1 - 2\lambda}$, il viendra $\varepsilon = \eta\sqrt{1 - 2}$, quel que soit M.

Pour tirer de là des conséquences relatives aux coniques, il suffit de regarder successivement r' comme le rayon d'un cercle bitangent et comme le rayon d'un cercle allotrope. Ainsi :

A tout cercle ayant son centre sur l'axe focal, correspondent

une droite et un indice tels qu'il y ait un rapport constant entre l'élongation ou la demi-corde d'élongation, d'un point quelconque de la conique par rapport au cercle, et la distance du même point à la droite.

La droite est perpendiculaire à l'axe focal, et les distances du centre de la conique au centre du cercle et à la droite ont entre elles un rapport égal au carré e^2 de l'excentricité.

Si l'on appelle r le rayon du cercle, g la moyenne proportionnelle entre les distances de son centre aux foyers, et si l'on pose

$$\mu = \frac{c}{b} \cdot \frac{r}{g},$$

le rapport constant dont il est question dans l'énoncé sera égal à μe.

Dans le cas de l'ellipse, c'est la demi-corde d'élongation ou l'élongation elle-même, qui doit figurer au numérateur de ce rapport, et l'on doit prendre comme indice $\frac{1}{2}(1 + \mu^2)$, ou $\frac{1}{2}(1 - \mu^2)$, suivant que le centre se trouve ou non, entre les foyers. Le contraire a lieu dans le cas de l'hyperbole.

Avec un énoncé convenablement modifié, la propriété subsiste pour les cercles ayant leurs centres sur le second axe de la conique.

LA GÉOMÉTRIE DU COMPAS

Par M. **Eug. Dubouis**, professeur au collège de Barcelonnette

Je me propose de démontrer très simplement et très élémentairement que le compas suffit aux constructions que l'on effectue ordinairement avec la règle, l'équerre et le compas, et que l'on peut même s'interdire l'usage d'arcs tangents pour déterminer des points. Pour cela, remarquons que l'équerre est inutile, comme on sait. Alors comme la règle et le compas ne servent qu'à déterminer des points par des intersections de circonférences et de droites, il suffit de donner des procédés pour trouver ces points d'intersection.

Les données ne seront que des points, soit considérés pour eux-mêmes, soit pour déterminer des lignes.

Cela posé nous divisons la démonstration en deux parties. Dans la première le compas est supposé illimité. Dans la seconde il est limité et les problèmes sont ainsi rendus pratiques.

PREMIÈRE PARTIE

Préliminaires. — 1° Prendre le symétrique d'un point par rapport à une droite (Facile).

2° Trouver le quatrième sommet D du parallélogramme ABCD, autrement dit : mener par le point C pris pour origine un segment équipollent à AB (Facile).

3° Doubler un segment et par suite le multiplier par un nombre entier.

Soit AB le segment. Soit C un point quelconque. Menons CD équipollent à AB, puis BE équipollent à CD. AE est double de AB.

Une autre solution est tirée de l'inscription de l'hexagone régulier.

3° Trouver la quatrième proportionnelle à trois longueurs a, b, c.

1er *Cas.* — $2a > b$; $a > c$. Avec a pour rayon décrivons une circonférence (O). Menons les cordes AB et AC égales à b et c (fig. 1). Soit D le symétrique de A par rapport à BC. La longueur cherchée est AD.

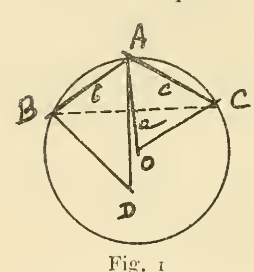


Fig. 1

En effet, les angles ABD et ADC sont égaux comme doubles de ABC. Comme d'autre part les triangles ABD et ADC sont isoscèles, ils sont semblables.

Donc $\frac{AO}{b} = \frac{c}{AD}$ ce qui démontre la proposition.

2e *Cas.* — $2a$ n'est pas à la fois inférieur à b et à c. On prend pour AO dans la figure précédente un multiple de a tel que la construction devienne possible. Alors si OA $= na$, on a :

$$\frac{na}{b} = \frac{c}{AD} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{nAD}.$$

La 4e proportionnelle qui est AD est facile à construire (3°).

4° Reconnaître si trois points sont sensiblement en ligne droite.

On reconnaît qu'il en est ainsi à ce que, en cherchant le symétrique d'un des points par rapport à la droite déterminée par les

deux autres, on est amené à décrire des arcs sensiblement tangents.

5° Reconnaître si une droite CD est sensiblement perpendiculaire à une droite AB.

On cherche si le symétrique de C par rapport à AB est sensiblement sur CD.

PROBLÈMES FONDAMENTAUX

1° INTERSECTION DE DEUX DROITES AB ET CD

1er *Cas.* — AB et CD sont les côtés égaux d'un trapèze isoscèle.

Supposons AC > BD. Soit M le point cherché. Menons AE équipollent à BD (2°). On a $\frac{EC}{BD} = \frac{ED}{BM}$ qui permet de construire BM (3°). On trace de B et D comme centres des cercles de rayon BM et on prend celui de leurs points communs qui est sur AB (4°).

2e *Cas.* — AB et CD sont les diagonales d'un trapèze isoscèle (Construction analogue).

3e *Cas.* — Droites quelconques, non sensiblement perpendiculaires (Voir 5°).

On remplace une des droites par la symétrique de l'autre par rapport à elle, et on est ramené à l'un des deux premiers cas.

4e *Cas.* — Droites perpendiculaires ou presque perpendiculaires (*fig.* 2).

On mène DE équipollent à AB (2°). On peut même multiplier DE de manière que CE devienne aussi oblique à AB que l'on veut. On cherche le point F commun à AB et CE. Si M est le point cherché, on a

$$\frac{CE}{CF} = \frac{DE}{FM} = \frac{CD}{CM},$$

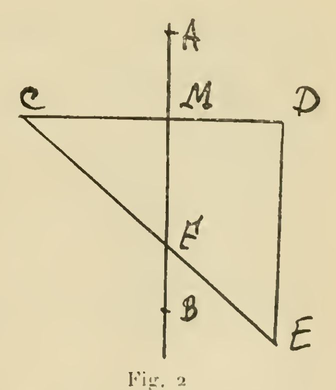


Fig. 2

ce qui permet de construire FM et CM. On aura ensuite le point M par deux arcs exactement ou sensiblement orthogonaux, ce qui constitue une très bonne méthode. Pour choisir convenablement celui des deux points que l'on trouve, on utilise le n° 4.

2° INTERSECTION DE DEUX CERCLES

Nous sommes maintenant en état de construire un cercle passant par trois points et le problème indiqué est alors immédiatement résolu.

3° INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

1er *Cas.* — La droite ne passe pas par le centre.

On cherche le centre du cercle, et, cela fait, il est facile de tracer le cercle symétrique du cercle donné par rapport à la droite. Il coupe le premier aux points cherchés.

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

120. Mathématiques. — Résoudre un triangle ABC, connaissant un côté a, la différence β des angles adjacents à ce côté et sachant que le sommet A est situé sur une droite xy donnée de position.

Léopold Massip,
Professeur de Mathématiques spéciales
à l'Ecole Saint-Georges.

121. — On donne deux circonférences tangentes extérieurement de rayon R et r. On mène la tangente commune AB (A sur la circonférence de rayon R et B sur celle de rayon r). Soit C le point de contact des deux circonférences, on forme le triangle ACB. Démontrer que ce triangle est rectangle et exprimer ses côtés en fonction de R et de r. **Léopold Massip.**

122. Epure. Cône et prisme. — 1° Le cône est de révolution. Son sommet est projeté horizontalement en S et est situé à 200 millimètres au-dessus du plan horizontal. L'axe du cône est projeté horizontalement suivant la droite SO ; le point O en est la trace horizontale. Le demi angle au sommet du cône est de 15 degrés. On demande : 1° de déterminer, d'après ces données, l'ellipse de base du cône sur le plan horizontal. Le prisme est oblique, sa base sur le plan horizontal est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle dont le centre est le point C et dont le diamètre est de 115 millimètres. Un des sommets a du triangle est à l'extrémité du diamètre perpendiculaire à l'axe du cône. Les arêtes sont inclinées à 45° sur le plan horizontal et en projection horizontale

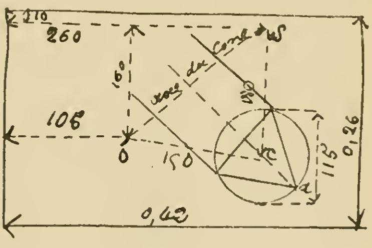


Fig. 1

Lire à la quatrième page de la couverture les conditions relatives à la correction et à l'abonnement des copies.

elles sont perpendiculaires sur la projection horizontale de l'axe du cône. On demande de déterminer l'intersection du cône et du prisme et de représenter en projection horizontale seulement le cône entaillé par le prisme.

123. Calcul trigonométrique. — Calculer les angles et le surface d'un triangle ABC, connaissant les trois côtés :

$$a = 3245 \qquad b = 5879 \qquad c = 5783.$$

(Concours de 1897).

124. Questions posées à l'oral. — Rendre calculable par logarithmes les expressions :

$$1 + \operatorname{tg} a, \ 1 + \operatorname{tg}^2 a, \ 1 + \operatorname{tg}^3 a, \ 1 + \operatorname{tg}^4 a.$$

125. — Discuter la fonction : $Y = \dfrac{x}{(x + 1)^2}$.

Résoudre l'inégalité : $\dfrac{a}{x - a} - \dfrac{2a}{x + a} > \dfrac{8a^2}{x^2 a^2}$.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

126. Mathématiques. — On inscrit un cylindre dans une sphère donnée, étudier la variation du volume du solide formé par ce cylindre surmonté à l'une de ses bases par l'hémisphère de même rayon que cette base.

127. — Calculer x donné par la formule :

$$x = \frac{(a + b)^m (m)(m - 1)(m - 2)(m - n + 1)}{\sqrt[q]{1 . 2 . 3 \ldots . n}}$$

en se servant des logarithmes sachant que

$$a = 5 \qquad b = 35 \qquad m = 15 \qquad n = 8 \qquad q = 7.$$

128. Physique et chimie. — Un tube barométrique dont le sommet s'élève à 76 centimètres au-dessus du niveau de la cuvette supposée très large contient de l'air sec qui occupe au-dessus du mercure dans le tube une longueur de 10 centimètres. On introduit dans le tube un liquide qui se volatilise entièrement et sature l'espace x occupé finalement par le mélange d'air et de vapeur. Déterminer x. La pression extérieure est équilibrée par 76 centimètres de mercure et la force élastique maximum de la vapeur à la température de l'expérience par 10 centimètres de mercure.

Donner les préparations du soufre, indiquer ses préparations physiques et les usages de ce corps.

129. Questions posées à l'oral. — Trouver $\sin \frac{a}{2}$, connaissant tga.

130. — On donne un triangle rectangle, on partage l'hypothénuse en $2n$ parties égales. Trouver la résultante du système de forces partant du *sommet* de l'angle droit et aboutissant aux points de division de l'hypothénuse.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

131. (*Obligatoire*). — On donne un cercle O et deux diamètres perpendiculaires OX et OY. On demande de mener une tangente AB (A sur OX, B sur OY), de façon que l'on ait $OA + OB = 2m$. Minimum de m.

132. (*Au choix*). — Recherche des divisions d'un nombre.

Un nombre divisible séparément par plusieurs nombres entiers, premiers entre eux, est divisible par leur produit.

Exposer les principes sur lesquels reposent la recherche du plus petit commun multiple de plusieurs nombres donnés.

133. Physique. (*Obligatoire*). — Dans une pompe aspirante la course du piston est de $0^m,50$ et la longueur du corps de pompe est égale à 3 décimètres carrés.

Quelle doit-être la hauteur du tuyau d'aspiration pour que la pompe soit amorcée dès le premier coup de piston. Section du tuyau d'aspiration 15 centimètres carrés. Quel est l'effort que l'on doit faire pour soulever le piston lorsque la pompe est en mouvement.

134. (*Au choix*). — Mélange des gaz et des vapeurs.

134bis. — Mélange des gaz.

Déterminer la force élastique de l'air contenu dans un récipient après n coup de piston quand ce récipient est en communication avec la machine pneumatique.

135. Questions posées à l'oral. — Diviser

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} \ldots + A_{m-1}x + A_m \text{ par } x + a$$

et déterminer la loi du quotient.

Montrer que le système d'équation $A = e$ $B = 0$ est équivalent au système $mA + nB = 0$ et $A = e$.

IV. — BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

136. — Une droite AB de longueur donnée a dont les extrémités s'appuient à la fois sur les deux côtés d'un angle donné POS $= \alpha$ peut occuper une infinité de positions. On demande quelle est celle pour laquelle la surface latérale du tronc de cône qu'elle engendre en tournant autour de l'axe perpendiculaire à OP atteint une valeur donnée πma. Examiner spécialement le cas où l'angle α est de 60 degrés et déterminer le maximum de cette surface.

137. (*Au choix*). — 1° Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé.

1° Résoudre un triangle connaissant les trois côtés.

3° Problème de la carte. (Sujets donnés à Alger).

138. Physique. — Un baromètre est enfermé dans un large tube de verre scellé à la lampe. A l'instant de la fermeture la hauteur de la colonne est 76 centimètres et la température 15 degrés. Calculer la hauteur de la colonne lorsque la température est de 40 degrés.

Coefficient de dilatation du mercure. . . . . . . $\frac{1}{5550}$

Coefficient de dilatation de l'air 0,00366. On ne tiendra pas compte de la dilatation du verre.

139. (*Au choix*). — 1° Décrire et interpréter les expériences qui conduisent aux notions de potentiel et de capacité électrique.

2° Condensation électrique.

3° Enoncer les lois fondamentales des courants. Unités pratiques d'intensité, de résistance et de force électromotrice.

140. Questions posées à l'oral. — Déterminer a et b de manière que le maximum et le minimum de l'expression

$$\frac{x^2 - ax - 3}{x^2 - bx + 5}$$

au lieu pour $x = 2$ et pour $x = 3$.

141. — Condition nécessaire et suffisante pour que trois nombres A, B, C soient les termes de rang m, n et p, d'une même progression arithmétique.

V. BACCALAURÉAT (LETTRES. — SCIENCES)

142. — Appliquer les propriétés des dérivées à la résolution de la question suivante : de toutes les boîtes cylindriques fermées de même surface totale πa^2. Quelle est celle qui présente la plus grande capacité? Quelles sont les dimensions de celle dont la capacité serait d'un hectolitre et qui remplirait les conditions de maximum indiquées.

143. (*Au choix*). — Etant donnés deux points sur la ligne de terre, un point dans le plan vertical et un point dans le plan horizontal, faire passer une sphère par ces quatre points. Déterminer son centre et son rayon.

II. Placer une sphère de rayon donné R de manière qu'elle soit tangente à la fois au plan horizontal, au plan vertical et au plan donné par ces traces LKP.

III. Etant donnée une droite $ab\ a'b'$ et une sphère oo', mener par la droite un plan qui coupe la sphère suivant un cercle de rayon donné r.

144. Physique et chimie. (*Au choix*). — I. Transformation du travail en chaleur. — Principe de l'équivalence. — Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. — Expérience de Joule.

II. Principe de la machine à vapeur : condenseur, son utilité. Mouvement du tiroir : détente. Puissance d'une machine. Unité pratique. Unités C. C_1. S.

III. Densité des gaz ; sa détermination par la méthode de Regnault, dans le cas où le gaz n'attaque pas les métaux. Comment varie ls densité d'un gaz avec la température et la pression ?

145. (*Obligatoire*). — On donne n éléments de pile identiques dont la résistance intérieure est r. Quelle doit être la résistance extérieure R pour qu'il n'y ait aucun avantage à les associer en série ou en batterie

On donne $r = 2$ ohms. $R = 10$ ohms. Quelle est la disposition la plus avantageuse.

146. Questions posées à l'oral. — Vraie valeur de

$$\frac{x^3 - 1}{x^4 + 2x^2 - 3x}$$

lorsque x tend vers 1.

147. — Résoudre l'équation :

$$\frac{a+x}{b+x}+\frac{b+x}{a+x}=\frac{5}{2}$$

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

148. Arithmétique. — Un spéculateur achète un pré à raison de 5,000 francs l'hectare. Après l'acquisition il s'aperçoit que son pré contient 8 décamètres carrés de moins que ce qu'il a payé; néanmoins il ne fait aucune réclamation, car il trouve l'occasion de le céder de suite au prix de 60 francs l'are (contenance exacte). En faisant cette vente il gagne 12 $_0/^0$ sur ce qu'il a déboursé. Calculer la contenance réelle du pré et calculer ses dimensions sachant qu'il est rectangulaire et que sa diagonale vaut 170 mètres.

149. Géométrie. — Une pyramide a pour base un triangle ABC, dont les côtés AB, AC, BC, valent respectivement 26 décimètres, 3 mètres et $2^m,80$. Son sommet S est sur la perpendiculaire menée par H (H centre du cercle circonscrit au triangle ABC) au plan ABC et AS $= 1^m,80$. Calculer le volume de cette pyramide en décimètres cubes et calculer sa surface totale en mètres carrés.

150. Physique et chimie. — I. Poids spécifique des gaz.

II. Hydrogène sulfuré. Sulfures.

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

151. Composition facultative de comptabilité. — (*2 heures*). I. Comparer le rôle du commissionnaire en marchandises et du courtier en marchandises. — Ducroire.

II. Etablir le *bordereau d'escompte* suivant :

Le 10 octobre 1897, remis en compte courant à la « Banque Centrale » :

1°	$938^f,45$ Bordeaux. . . .	à vue;	taux du change :	*p.* (pair);
2°	$311^f,20$ St-Hippolyte (min. 500)	20 oct.	—	70 c/
3°	$1285^f,40$.	31 déc.	—	25 c/

Taux d'escompte : 4 1/4 p. 0/0 (calculer par les nombres) ; minimum d'escompte pour effets à vue ou trop courts :

10 jours pour les effets payables dans les chefs-lieux de département.

15 jours pour les effets payables dans les chefs-lieux d'arrondissement.

20 jours pour les effets payables dans les autres localités.

Commission 3 p. %.

III. *Opérations à passer au Journal* (parties doubles) en autant d'articles que ci-dessous :

1° Acheté des marchandises des suivants :

1° Arbel.	5,800f
2° Leroy.	3,650
3° Au détail, payé comptant	250
	9,700

2° Mon règlement avec Arbel :

1° Espèces.	1,000f
2° Mon billet à son ordre	1,200
3° Ma remise en 2 effets.	1,830
4° Escompte. . . . . ,	116
5° Chèque sur mon banquier E. Jarry et Cie	1,654
	5,800

3° Ecritures de la même opération chez Arbel.

4° Négocier au comptant chez E. Jarry et Cie :

Effet n° 1275, nominal.	1260f,00
Agio.	19,90
Encaissé le net. .	1240,10

152. Arithmétique. — La betterave blanche de Silésie donne 7 % de son poids en sucre. 1° Quelle superficie faudra-t-il ensemencer dans un terrain qui produit approximativement 3kg125 de cette espèce de betterave par mètre carré, pour fournir la quantité de betteraves nécessaire à la fabrication de 87,500 kilogrammes de sucre. 2° Quelle serait la valeur des betteraves à raison de 16frs,50 les 1,000 kilogrammes.

153. Algèbre. — Trouver deux nombres dont la somme soit 12 et le produit 35.

Résoudre

$$x(y+z)=a$$
$$y(x+z)=b$$
$$z(x+y)=c.$$

151. — Calculer x donné par la formule :

$$\sqrt[15]{\frac{\sqrt{\overline{88,10}^2}}{\sqrt[3]{\overline{58,9}^3}} \times \overline{7999}^2 \quad \sqrt[6]{37,89}}$$

DEUXIÈME PARTIE

Ont résolu les questions du numéro de novembre :

I. *A l'École de Saint-Cyr.* — MM. de Géransac à Rouen, Martinard à Périgueux, Laplanche à Perpignan, Marcenac à Cahors, Balitrand à Tours, Bessières Raymond à Tulle, Louis Cazal à Decazeville, Henri Laffite à Moissac, Jean Loüys à Aurillac, Paul Boyer à Pithiviers (tout l'examen), Dubuy à Rodez, Paul Lion à Tarbes, René Riche à Nice, Léon Polin à Meudon, Tarnyés à Figeac (la question de Mathématiques), Bardin à Lille, Colas, Vicq à Flaujac (l'épure), Vincent à Beauvais, Maréchal à Paris, Lefèvre à Paris, Baudel à Paris (le calcul trigonométrique).

II. *A l'Institut Agronomique.* — MM. Vaucant à Montpellier, Teysserac à Cambrai, Albeski à Brest, Mironyl à Bastia, Maurice Destins, Léon Rouquette à Cahors, Rivière à Moissac, Sauzely à Perpignan (tout l'examen).

III. *Au Baccalauréat Lettres Mathématiques.* — MM. Maurice Destins, Lugan à Liège, Mock Léon à Blois, Chanul Alphonse à Toulouse, Ramel à Vienne (tout l'examen).

IV. *Au Baccalauréat de l'Enseignement Moderne.* — MM. Vicq à Flaujac, Brunel à Périgueux, Trespoux à Gap, Maurice Destins (tout l'examen).

V. *Aux Écoles d'Agriculture.* — MM. Paulin Duval à Agen, Tassart à Nancy, Martin à Hozelerauck, Hagener à Lille (tout l'examen).

Nota. — Les abonnés à la correction des copies trouveront dans la troisième partie de nombreuses questions résolues qui pourront les fortifier dans la préparation de leurs examens.

BIBLIOGRAPHIE

Cours de Géométrie Descriptive de M. Roubaudi, *professeur au lycée* Buffon *et au lycée* Carnot. — *Masson et Cie, éditeurs, 120, boulevard Saint-Germain.*

Dans sa préface, M. Roubaudi s'exprime ainsi : « Les procédés de la Géométrie Descriptive étant fondés sur la transformation des figures par projection, il était naturel de donner dès le début les principes de cette méthode qui sont utilisés dans la suite. J'en ai déduit la notion des éléments à l'infini, indispensable en Géométrie descriptive ». Cette phrase indiquant une innovation dans les méthodes d'exposition, employées jusqu'à ce jour, pour l'enseignement de la Géométrie Descriptive, nous avons lu l'ouvrage de M. Roubaudi avec la plus grande attention. L'exposition claire des méthodes

et l'ordre qui règne dans ce livre en font un outil précieux, entre les mains de ceux qui veulent apprendre la géométrie de Monge.

Les figures sont faites de façon à servir de modèle de trait aux élèves qui désireraient faire des épures soignées. C'est donc avec plaisir et conviction que nous recommandons cet ouvrage à tous ceux qui préparent des examens où figure un programme de Géométrie Descriptive. G. M.

SOLUTION DES QUESTIONS 1 ET 2 (COPIE D'ÉLÈVE)

On considère tous les triangles qui ont un sommet A commun, la bissectrice AD de l'angle A invariable de grandeur et de position et dont le cercle circonscrit passe par un 3e point fixe E de la droite AD : 1° Démontrer que dans tous les triangles le produit du diamètre du cercle circonscrit par la hauteur est constant ; 2° Trouver le lieu du milieu du coté opposé au point A ; 3° Trouver le lieu du point de rencontre des médianes ; 4° Construire le triangle connaissant les points A, D, F et soit la grandeur de A, soit la longueur du côté opposé BC.

1° Nous voulons démontrer que l'on a : $2Rh_a = bc$. Or, d'après un théorème connu on a : $\overline{AD}^2 = 2Rh_a - BD \times BC$, mais $BD.DC = AD \times DF$. Or, A, D, F sont fixes ; donc $AD \times DF$ est constant

$$2Rh_a = \overline{AD}^2 + AD \times DF = K^2 = \text{constante}.$$

2° Si on abaisse la perpendiculaire du point F (milieu de l'arc BC) sur la corde BC elle passe par le milieu M de ce côté. Le point M se trouve donc sur la circonférence décrite sur DF comme diamètre. La réciproque est facile à étudier.

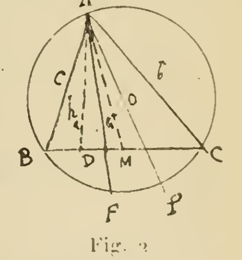


Fig. 2

3° Le lieu du point de rencontre des médianes est une circonférence homothétique à la circonférence décrite par le point M (évident).

4° Construisons le triangle connaissant l'angle A, les points A, D, F. Supposons le problème résolu. Soit BC mis en place on a :

$$BD \times DC = AD \times DF = K^2,$$

un premier lieu de B est le côté AX de l'angle et un premier lieu de C est AY, un 2e lieu de C est la figure inverse de AB le centre d'inversion étant D et le module $= K^2$ *construction* : on a $BE \times DC = DA \times DF$. Je mène DE perpendiculaire à AX. Je trace la circonférence passant par A, E, F, elle coupe DE en E' et l'on a : $DB \times DC = DA \times DF = BE \times DE'$, la circonférence inverse est donc la circonférence décrite sur DE' comme diamètre, elle coupe AY en deux points C' et C'' qui répondent à la question. **Raymond de Saint-Roman.**

2° Dans un triangle ABC on donne $B = 30$, le rapport $\frac{b}{c} = m$ et la distance x entre les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A, calculer C et construire le triangle. Posons

$$MC = z, \quad MN = x, \quad MB = y, \quad CN = z', \quad BN = y'.$$

On a

$$\overline{AM}^2 = bc - \beta y, \qquad \overline{AN}^2 = \beta' y' - bc,$$

$$\beta = \frac{ab}{b+c}, \quad y = \frac{ac}{b+c}, \quad \beta' = \frac{ab}{b-c}, \quad y' = \frac{ac}{b-c}.$$

En outre, les deux bissectrices AM et AN sont rectangulaires, on a :

$$\overline{MN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2,$$

d'où

$$x^2 = a^2bc\left(\frac{1}{(b-c)^2} - \frac{1}{(b+c)^2}\right) = \frac{4a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)^2},$$

$$x = \frac{2abc}{b^2-c^2} \text{ (on suppose } b^2 > c^2\text{)}.$$

Mais on a $\frac{b}{c} = m$, on a donc $x = \frac{2am}{m^2-1}$, d'où $a = \frac{(m^2-1)x}{2m}$. On a : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 30$, $b^2 = a^2 + c^2 - ac$,

Fig. 3

or, $b^2 = m^2c^2$, donc $m^2c^2 = \frac{(m^2-1)^2x^2}{2m} + c^2 - \frac{(m^2-1)cx}{2m}$. Cette équation est divisible par $m^2 - 1$, il revient : $4m^2c^2 - 2mxc - (m^2-1)x^2 = 0$.

Réalité. $\quad m^2x^2 + 4(m^2-1)x^2 \geqslant 0 \quad 5m^2 - 4 \geqslant 0$

$$m^2 + 4m^2 + 4 \geqslant 0 \qquad m^2 \geqslant \frac{4}{5} \quad m > \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

. . . .

Raymond de Saint-Roman.

TROISIÈME PARTIE

LA GÉOMÉTRIE DU COMPAS

Par M. **Dubouis** (*suite et fin*, voir le numéro de décembre).

2e *Cas*. — La droite est déterminée par le centre O du cercle (O), et un point A (*fig*. 3). Menons la tangente AB au cercle. Pour cela, nous aurons à prendre le milieu de AO et nous serons amenés à construire un point C équidistant de A et de O.

Traçons le cercle de centre C passant par A, et soit D le point diamétralement opposé à A obtenu par l'inscription de l'hexagone régulier. Déterminons sur ce cercle la corde AE égale à AB. Le cercle décrit du point D comme centre et passant par E coupe le cercle donné aux points cherchés P et Q.

En effet, la puissance du point A par rapport au cercle de centre D est $\overline{AE}^2$, car AE étant perpendiculaire au rayon DE est tangent à ce cercle. Or, $\overline{AE}^2$ est égal à $\overline{AB}^2$. Donc le point A a même puissance par rapport aux deux cercles et, par suite, il est sur leur axe radical, ce qui démontre la proposition.

DEUXIÈME PARTIE

Problème I. — Soient A, B, C trois points tels que la distance AC puisse être prise au compas, AB ne le pouvant pas. Mener BD équipollent à CA.

On intercale entre AC et le point B une suite de parallélogrammes successifs de côtés suffisamment petits.

Problème II. — Trouver le milieu de AB.

On remplace AB par un segment CD plus petit et déterminé comme dans le problème précédent. CD a même milieu que AB. On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait un segment suffisamment petit.

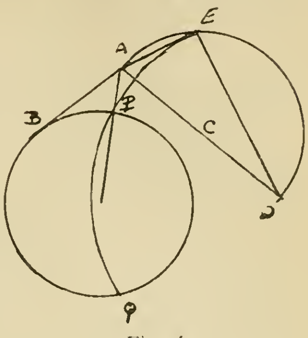


Fig. 4

Problème III. — Rendre possibles les constructions de la 1re partie.

On prend un centre d'homothétie S. On réduit la figure formée par les données dans le rapport $\frac{1}{2^n}$, n étant assez grand pour que le problème puisse se traiter sur la nouvelle figure avec le compas donné. On y arrive par le problème II. La construction étant faite sur la seconde figure, on l'amplifie par homothétie dans le rapport $\frac{2^n}{1}$, au moyen du centre S et le problème est achevé.

Remarque. — Quand le compas est suffisamment grand, on voit, en reprenant les raisonnements de la première partie, que l'on peut toujours arriver droit au but sans hésitation.

Mais si le compas n'est pas assez grand on rencontre une difficulté. Pour résoudre les problèmes auxiliaires, il faut faire des tâtonnements. Cet inconvénient n'est pas grand quand on peut embrasser d'un coup d'œil toute la figure, car alors les simples notions de direction et de distance permettent de diriger convenablement les opérations. Dubois.

QUESTION 672

Solution, par M. V. Cristescu, Ingénieur à Bucarest

On donne les relations :

$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) \operatorname{tg}(x + y) = (\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z) \operatorname{tg}(y + z) = (\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} x) \operatorname{tg}(z + x)$,

on demande d'isoler les inconnues, c'est-à-dire tirer des relations en question les suivantes : $f(x) = f(y) = f(z)$. (G. L.)

Les relations proposées peuvent être écrites :

$$\frac{(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)^2}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{(\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)^2}{1 - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z} = \frac{(\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} x)^2}{1 - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x}.$$

Si l'on retranche, d'après une propriété connue, le deuxième rapport du premier, le troisième du deuxième et le premier du troisième, terme à terme, on obtient, si l'on supprime les facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs :

$$\frac{\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{tg} y + 2 \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} z} = \frac{\operatorname{tg} z + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x}.$$

Si l'on fait la somme des numérateurs et des dénominateurs, on trouve

que ces rapports sont égaux à 4. On en conclut que l'on a les équations :

$$\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 2 \operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} y,$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \operatorname{tg} z.$$

Ces trois équations forment un système indéterminé, car si l'on ajoute deux d'entre ces équations, on obtient la troisième. Elles donnent

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z, \quad \text{ou} \quad x = k\pi + z, \quad y = k'\pi + z,$$

ce qui résout la question. **V. Cristecu.**

QUESTION 600

Solution par M. H. Dellac

1. — *Pour qu'une droite* L *soit l'axe de similitude (ou droite double) d'un système de deux polyèdres semblables* P,P', *il faut et il suffit que toutes les arêtes homologues soient vues, à partir de* L, *sous des angles dièdres égaux chacun à chacun et rangés dans le même ordre.*

Si on ne considère pas tous les points de l'espace comme rattachés à P *et* P', *il peut y avoir exception.*

LA CONDITION EST NÉCESSAIRE

On suppose la droite L axe de similitude ; donc, par une rotation autour de L on peut amener P' à être homothétique de P par rapport à un certain point de L. Alors les arêtes homologues sont vues, à partir de L, sous des angles dièdres identiques, si l'homothétie est directe, ou opposés par l'arête si elle est inverse. Donc avant la rotation ces arêtes étaient vues sous des angles égaux et rangés dans le même ordre.

Remarque. — Dans le cas de la similitude inverse il y a suivant L deux rayons homologues, l'un de P et l'autre de P', dirigés en sens contraires. Pour juger de l'ordre des éléments dans chaque figure, il faudrait deux observateurs placés de la même manière par rapport à ces figures, c'est-à-dire en sens contraires le long de L. Par suite, ils verraient les dièdres égaux des deux figures rangés dans un ordre inverse. Mais l'énoncé n'admet qu'un observateur.

LA CONDITION EST SUFFISANTE

On s'appuiera sur le lemme suivant, facile à démontrer :

Par une droite donnée L *et tous les sommets* A, B, C *d'un polyèdre* P *on fait passer des plans ; par un point* a *pris dans le plan* (L, A) *on mène* ab *parallèle à* AB *et limitée au plan* (L, B) ; *on mène de même* ac *parallèle à* AC *et limité au plan* (L, C) *etc.* ; *démontrer que les points* a, b, c, *forment un nouveau polyèdre* p *homothétique à* P *par rapport à un point de* L.

L'homothétie peut être directe ou inverse.

Cela admis, je fais tourner le polyèdre P' autour de L de manière que le feuillet (S,A') vienne se placer sur le feuillet (S,A) ; d'après l'hypothèse le feuillet (L,B') se placera sur (L,B), le feuillet (L,C') sur (L,C), etc. Soit p cette nouvelle position de P'. Par un sommet A du polyèdre P, non situé sur L,

je mène des droites parallèles aux arêtes A'B', A'C' de la figure p, et je les arrête aux plans (L,B), (L,C) ... D'après le lemme je forme ainsi une nouvelle figure P'' homothétique à D par rapport à un point de L, et le rapport d'homotétie est égal au rapport donné ρ. Donc ce polyèdre P'' est semblable à P' et par suite à P, et le rapport de similitude est $\frac{\rho}{\rho} = +1$. Ces deux polyèdres P'', P sont donc directement égaux. Je dis de plus qu'ils coïncident. Dans le polyèdre P je considère avec AB d'autres droites égales partant aussi de A et limitées au plan (L,B). Cela est possible puisqu'on suppose tous les points de l'espace rattachés à la figure P. Ces droites forment un cône droit ayant pour sommet A et pour hauteur la droite AI perpendiculaire au plan (L,B). Ces droites ont pour homologues dans P' puis dans p, puis dans P'' des droites aussi toutes égales entre elles. Comme par hypothèse ces droites nouvelles sont vues, à partir de L, sous des angles dièdres égaux à ceux de leurs homologues dans P, elles sont vues toutes sous un angle égal à $\widehat{ALB}$ en grandeur et en sens; donc elles sont aussi limitées au plan (L,B); elles forment donc aussi un cône droit ayant pour hauteur AI. Les deux cônes de P et de P'' étant égaux, coïncident, mais cela ne suffit pas pour démontrer la coïncidence de P et P''. Cela prouve que la droite AI perpendiculaire au plan (L,B) représente deux droites homologues coïncidentes des figures P, P''. On verra de même que la perpendiculaire AH, abaissée du point A sur un autre plan (L,C) passant par L, représente aussi deux droites homologues coïncidentes des figures P,P''. Donc le triangle AIH représente deux faces homologues coïncidentes des deux figures P, P''. Puisque déjà ces figures sont directement égales, elles coïncident.

Donc enfin le polyèdre p est homothétique de P par rapport à un point de L; par suite P' tournant autour de L est devenu homothétique à P par rapport à un point de L; cela prouve que L est l'axe de similitude des deux figures P, P'. C. Q. F. D.

Exception. — Cette démonstration suppose que à partir de A on peut mener plus d'une perpendiculaire sur les plans passant par L.

Si on ne considérait pas tous les points de l'espace comme rattachés à P, il pourrait se faire qu'il n'y eût qu'une perpendiculaire partant de A, et alors le théorème serait en défaut. C'est ce qui arrive si la figure P se réduit à une pyramide dont la base passe par L. En effet, prenons deux pyramides semblables dont les bases sont situées d'une manière quelconque dans le même plan. Tout plan passant par les deux sommets coupe le plan de la base suivant une droite L, d'où l'on voit les arêtes des pyramides sous des angles égaux, et cependant ce n'est pas un axe de similitude.

Il y aurait encore exception dans le cas de deux polygones semblables plans. L'intersection des deux plans jouit de la propriété énoncée sans être axe de similitude. C'est que dans ce cas la figure P' n'existe pas.

II. — Pour qu'un point soit le centre de similitude (ou point double) du système de deux polyèdres semblables P, P' il faut et il suffit que, de ce point on voit les arêtes homologues sous des angles égaux chacun à chacun.

LA CONDITION EST NÉCESSAIRE

Si le point σ est centre de similitude, en faisant tourner P′ d'un angle convenable autour d'un axe passant par σ, on peut rendre ce polyèdre homothétique de P soit directement soit inversement. Dans les deux cas on voit alors les arêtes homologues sous des angles égaux : donc il en était de même avant la notation.

Cette première partie prouve qu'il existe toujours un point remplissant les conditions de l'énoncé.

LA CONDITION EST SUFFISANTE

Les droites partant de σ et allant aux sommets de P, P′ forment deux angles polyèdres que l'on peut décomposer en trièdres, qui auront leurs faces égales chacune à chacune d'après l'hypothèse. Dans les couples de trièdres les éléments sont toujours rangés dans le même ordre ou toujours dans l'ordre inverse. On ne pourrait pas avoir le même ordre dans un couple et l'ordre inverse dans un autre. Supposons par exemple deux couples ayant une face commune (σABC, σA′B′C′) et (σABD, σA′B′D′), les deux premiers ayant le même ordre et les deux autres l'ordre inverse. Je fais coïncider σA′B′C′ avec σABC ; alors les arrêtés σD′, σD deviennent symétriques par rapport à la face commune : donc les arêtes CD, C′D′ ne peuvent pas être vues du point σ sous des angles égaux, ce qui est contre l'hypothèse.

Les angles trièdres et par suite les angles polyèdres de P et de P′ sont directement ou inversement égaux. On peut donc amener l'angle polyèdre de P′ à coïncider avec celui de P dans le premier cas, ou avec l'angle opposé par le sommet dans le second en lui faisant exécuter une rotation convenable autour d'un axe passant par le sommet commun σ. Je désigne par p cette nouvelle position P′ : elle est semblable à P et le rapport de similitude est ρ. Par le sommet A, homologue du sommet A′, je mène des droites AB″, AC″ respectivement parallèles aux arêtes A′B′, A′C′ de p, et je les limite aux rayons σB, σC. Je détermine ainsi des sommets d'un nouveau polyèdre P″ qui est évidemment semblable à p, et le rapport de similitude est ρ. Donc les deux polyèdres P, P″ sont semblables entre eux et leur rapport d'homothétie est $\frac{\rho}{\rho} = +1$; donc ces deux figures sont directement égales ; je vais démontrer de plus qu'elles coïncident.

En même temps que la droite AB je considère dans P la droite AB_1 égale à AB et limitée aussi au rayon σB. Cela est possible puisque tous les points de l'espace sont rattachés à P. Dans la figure P″ les droites homologues AB″, AB''_1 sont égales entre elles, et les triangles homologues ABB_1, $AB''B''_1$ sont égaux. De plus, la droite AB″ doit être vue du point σ sous un angle égal à AσB, en grandeur et en sens ; donc l'extrémité B''_1 se trouve sur σB. Les deux triangles isoscèles égaux ABB_1, $AB''B_1$ ayant même sommet et leurs bases sur une même droite doivent coïncider ; mais on ne sait pas si AB″ tombe sur AB ou AB_1. Ce qu'il y a de certain c'est que les hauteurs des deux triangles sont des droites homologues coïncidentes suivant AI. On verrait de même qu'une autre droite AH perpendiculaire sur un autre rayon σC représente deux droites homologues de P et P″. Ces deux figures direc-

tement égales ont donc deux triangles homologues coïncidents ; donc elles coïncident.

On voit donc que p est homothétique à P par rapport au point σ; par suite P′ peut être rendue homothétique à P par rapport au point σ par une rotation autour d'un axe passant par ce point. Donc ce point σ est bien le point double, ou centre de similitude des deux polyèdres P, P′.

Exception. — Il peut y avoir exception lorsque du point A on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire sur les rayons partant du point σ. C'est ce qui arrive lorsque les deux figures se réduisent à deux triangles semblables dont les bases passent par le point σ.

III. — *On donne deux droites* L, L′ *situées d'une manière quelconque dans l'espace, deux points* A, A′ *situés sur ces droites et un rapport* ρ : *mener un plan* P *parallèle à un plan donné* Q *qui coupe les deux droites en deux points* M, M′ *tels que l'on ait* $\frac{A'M'}{AM} = \rho$.

Si on fait déplacer le point M sur L, le point M′ se déplace sur L′ dans un sens que l'on suppose connu, et trace une division semblable à celle de M ; il s'agit de faire passer le plan cherché par deux points homologues de ce système.

Sur les droites L, L′ je mettrai des flèches dans les sens où les divisions semblables vont en croissant, si ρ est positif. Si ρ est négatif il faut changer le sens d'une des deux flèches. J'appelle angle des droites l'angle formé par deux demi-droites partant d'un même point O et étant parallèles à L,L′ et dans les sens des flèches. J'appelle bissecteur des droites le plan perpendiculaire au plan de cet angle O et contenant la bissectrice de l'angle.

L'axe de similitude du système formé par les deux divisions semblables doit être tel que par une rotation convenable de L′ autour de cet axe, cette droite L′ devienne parallèle à L, les flèches ayant le même sens. Il faut donc que cet axe fasse des angles égaux avec les flèches des droites, et par suite qu'il soit parallèle à leur bissecteur.

1° Je suppose que le plan donné Q soit perpendiculaire au bissecteur des droites. Soit l' la projection de L′ sur le plan passant par L et parallèle à L′, et OZ la bissectrice de l'angle l'OL ; c'est la trace du plan bissecteur des droites. Du point O j'abaisse sur le plan Q une perpendiculaire Ox ; elle est contenue dans le plan bissecteur, et par suite fait des angles égaux avec les droites données L, L′. On peut donc prendre Ox pour axe de similitude du système formé par les deux divisions semblables et la droite double Ox. Soit P le plan cherché, parallèle à Q, coupant les droites aux points homologues M, M′. Comme ce plan est perpendiculaire à l'axe de similitude et qu'il contient les deux points homologues M, M′ c'est le plan double du système. De là cette construction.

Je tire la corde AA′, je la divise au point α dans le rapport donné ρ et par ce point α je mène un plan parallèle au plan donné Q ; c'est le plan cherché.

2° Le plan donné Q n'est pas perpendiculaire au plan bissecteur.

Je remarque que les droites L, L′ et les cordes AA′, BB′, CC′ qui joignent leurs points homologues définissent une paraboloïde hyperbolique. Pour

définir ce paraboloïde je puis conserver L et remplacer L' par une autre génératrice L'' ; je choisis celle-ci de manière que le nouveau plan bissecteur de l'angle formé par L et L'' soit perpendiculaire à Q, et je retombe sur le premier cas.

IV. — *On donne dans l'espace deux angles égaux* xAy, x'A'y' *et une droite* l *dans le plan du premier : mener un plan, parallèle à* l, *qui en coupant les plans des deux angles détermine deux triangles semblables ayant un rapport de similitude égal au nombre donné* ρ.

Dans l'angle xAy je forme un triangle ABC dont la base BC soit parallèle à l, et dans l'angle $x'Ay'$ je forme un triangle semblable en prenant $A'B' = \rho \cdot AB$ et $A'C' = \rho \cdot AC$. J'ai ainsi défini complètement un système de deux figures semblables. Cependant il y aurait ambiguïté si le triangle ABC était isoscèle avec BC pour base. Le plan cherché coupant les plans donnés suivant MN parallèle à BC et M'N' parallèle à B'C', doit être parallèle au plan de ces deux droites. La question est donc ramenée à construire un plan parallèle à un plan donné, et coupant les deux droites homologues ABx, A'B'x' en deux points homologues : c'est le problème précédent.

QUESTION 706

Par le sommet A d'un angle donné BAC, on mène une droite quelconque δ et l'on construit les paraboles P_1, P_2 tangentes, l'une aux droites AB, δ, l'autre, aux droites AC, δ et qui admettent toutes deux un point donné F pour foyer. Si p_1, p_2 sont les points où ces paraboles touchent leur tangente commune δ, on demande de démontrer que l'angle p_1Fp_2 est constant.

Vve F. Prime.

Solution, par M. **A. Droz-Farny**

Si d'un point A quelconque on mène deux tangentes AB et AC à une parabole de foyer F, on sait que l'angle FBA = FAC ; conséquence évidente du théorème bien connu que la circonférence circonscrite à un triangle circonscrit à une parabole passe par le foyer de cette dernière. On aura donc :

$$\text{angle } Fp_2 = FAC$$
$$\text{angle } Fp_1A = FAB$$
$$Fp_2A - Fp_1A = BAC \quad \text{pour soustraction.}$$
$$< p_1Fp_2 = BAC.$$

C. Q. F. D.

A. D. F.

Ont résolu les mêmes questions : MM. Ernest Foucart, Francis Dauzats, L'huillier, Sollerskinsky.

Le Directeur-gérant,

Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

155. — Aux extrémités du diamètre AC d'un cercle O, on mène les tangentes AB et CD, et des points B et D, les autres tangentes BE et DF qui se coupent en M ; on tire enfin les droites DE et BF qui se rencontrent en N.

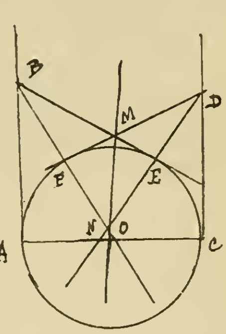


Fig. 1

Démontrer que les droites BD, FE et AC se coupent en un même point I et que MN est la polaire de ce point.

Déterminer le lieu des points M et N lorsque :

$\frac{AB}{CD}$ ou $AB \times CD$, ou $AB \pm CD$ sont constants.

H. Lecocq, ancien professeur de l'Université.

156. — On donne une circonférence et on demande de trouver une corde AB telle qu'en abaissant la perpendiculaire AC on ait en menant OI perpendiculaire à CB on ait :

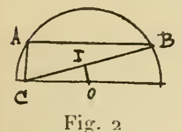


Fig. 2

$$\frac{\text{surf ABC}}{\text{surf COI}} = m.$$

Edouard Drouet.

157. Epure. Pyramide et cylindre. — La pyramide SABCD a sa base ABCD dans le plan de projection.

$\widehat{A} = 90°$, $\overline{AB} = 90$ millimètres, $AD = CD = 100$ millimètres $BC = 115$ millimètres — ABCD est un quadrilatère convexe. Hauteur de la pyramide : 52 millimètres. Plus courte distance de SD et AB : 70 millimètres $SD = 95$ millimètres. S se projette intérieurement à ABCD.

Le cylindre de révolution a pour axe CS et pour rayon 5 centimètres.

Lire à la quatrième page de la couverture les conditions relatives à la correction et à l'abonnement des copies.

1° Représenter la partie de la pyramide extérieure au cylindre.

2° Déterminer les points les plus bas des sections faites par les faces SAB et SAD.

Note. — On pourra prendre la trace horizontale du cylindre pour directrice du cylindre à la condition de l'avoir déterminée exactement.

158. Calcul. — On donne les 3 côtés d'un triangle :

$$a = 25\,648^{m} \qquad b = 32\,907^{m} \qquad c = 29\,763^{m}.$$

Calculer les 3 angles, la hauteur CH et la surface du triangle.

159. Questions d'oral. — Conditions de divisibilité d'un polygone entier $f(x)$ par $(x - a)^2$ et $(x - a)^3$.

Barbarin,
professeur au Lycée de Bordeaux.

160. — On trace un cercle de rayon R. Deux cercles de rayon R′ et R″ tels que $R = R' + R''$ sont tangents intérieurement en A et en B au cercle de rayon R. Ces deux cercles se coupent en E. Démontrer que l'arc AB sur la grande circonférence égale la somme des arcs AE + EC.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

161. Mathématiques. — Une suite de sphères homogènes CC′ C″..... en nombre illimité et tangentes extérieurement sont inscrites dans un même cône de révolution dont l'ouverture est 2ω. La distance a du sommet S du cône au centre C de la sphère la plus éloignée est connue. On demande : 1° D'exprimer au moyen de a et de ω la distance x du sommet du cône au centre de gravité de l'ensemble des sphères ; on devra trouver en particulier que pour $\omega = 30°$, $x = \frac{39}{4a^2}$. 2° Ce que devient x pour $x = 0$ et pour $\omega = 0$. 3° Démontrer que quand ω varie de 0 à 90° x va toujours en augmentant.

162. — Dans un solide formé de deux cônes égaux appliqués l'un contre l'autre par leurs bases on propose d'inscrire le cylindre dont la surface totale soit maximum.

163. — Calculer par logarithmes :

$$x = \sqrt[7]{\pi R^2 \left(R' + R'' + \sqrt{R'R''}\right)}$$

pour $R = 3^{m}$, $R' = 0^{m},012$, $R'' = 9^{m},99$.

164. Physique et chimie. — Dans un appareil de Morin le cylindre a trois mètres de haut, il fait exactement un tour en une seconde. Sur sa surface sont tracées 100 génératrices équidistantes. Combien le poids en rencontrera-t-il en tombant dans sa chute ? — Construction d'un thermomètre, déplacement des points 0 et 100. — Enoncer les systèmes cristallins et donner des exemples à chaque cas.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

165. Mathématiques. — (*Obligatoire*) Trouver par les progressions la somme des nombres renfermés dans la table de multiplication si on la prolonge jusqu'à 100 fois 100.

166. — (*Au choix*) Propriété de la tangente à l'hélice.

Démontrer la relation entre le carré d'une corde (d'une parabole) perpendiculaire à l'axe et sa distance au sommet.

Mener à une ellipse une normale parallèle à une direction donnée.

167. Physique. — (*Obligatoire*) 8 litres d'hydrogène à une pression correspondant à 74 centimètres de mercure sont mélangés avec 3 litres d'oxygène, à une pression correspondant à 76 centimètres de mercure, les deux gaz étant à une température de 14°. Le volume total est réduit à 10 litres. A quelle température faut-il porter le mélange pour que la pression devienne la pression initiale de l'oxygène. Coefficient de dilatation des gaz : $\frac{1}{273}$.

168. — (*Au choix*) Photométrie, photomètres de Bouguer, de Bunsen, de Foucault, de Runford, de Wheatstone.

Lois de la réfraction ; démonstration expérimentale.

Etablir la formule des miroirs convexes (convention de signes).

IV. — BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

169. Mathématiques. — (*Obligatoire*) Les trois angles d'un triangle forment une progression géométrique dont la raison est 1/4. Quels sont ces angles ?

169 bis. — (*Au choix*) Calculer sin $2a$, cos $2a$, tg $2a$, limite

de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers o. Tranformer en produit la somme de deux cosinus.

170. Physique. — (*Obligatoire*) Un projectile est lancé de bas en haut avec une vitesse de 300 mètres par seconde. On demande à quelle hauteur il s'élèvera. 2° Au bout de combien de temps reviendra-t-il à son point de départ.

170 bis. — (*Au choix*) Loi de Mariotte ; manomètre ; mélange des gaz et des vapeurs.

V. BACCALAURÉAT (LETTRES. — SCIENCES)

171. — Démontrer que les trois points ABC de coordonnées A ($x = 1$ $y = 2$), B ($x = 2$ $y = 3$), C ($x = 3$ $y = 4$) sont en ligne droite.

2° Former l'équation de la droite qui passe par les points A ($x = 0$ $y = 2$), B ($x = 3$ $y = 0$).

172. — (*Au choix*) Lois de Kepler ; inégalité des saisons. Calendrier ; projection de Mercator.

173. Physique. — Dans un récipient contenant de l'air sec à la pression 755, on fait le vide jusqu'à la pression x. On ouvre le robinet et on fait entrer de l'hydrogène jusqu'à ce que le mélange ait de nouveru la pression 755. On fait de nouveau le vide et on fait arriver de nouveau de l'hydrogène jusqu'à la pression de 755 millimètres. Quelle doit être la valeur de x, pour que le poids de l'hydrogène soit 1/10 du poids de l'air avec lequel il est mélangé.

174. — (*Au choix*) Bobine de Ruhmkorff; éclairage électrique ; microphone.

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

175. — Un piéton part à 8 heures du matin, il fait 1 kilomètre en 9 minutes, il se repose 3 minutes après chaque kilomètre. A quelle heure sera-t-il rejoint par un courrier qui part dans le même sens à midi, fait 9 kilomètres à l'heure et se repose 20 minutes chaque fois qu'il a parcouru 20 kilomètres.

Vazou.

176. — Trois bateaux partent du même point le même jour. On demande dans combien de jours ils repartiront ensemble

sachant que le premier part de ce point tous les cinq jours, le deuxième tous les sept jours et le troisième tous les onze jours.

177. — Calculer x donné par la formule :

$$x = \frac{\sqrt{3789} - \sqrt[3]{29023} + \sqrt{7089} - \sqrt[5]{0,0007}}{\pi^2}$$

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

178. — On doit à une personne 14 720 francs, à la fin de chaque année on lui donne 2000 francs. Pour combien de temps sera-t-elle entièrement payée, le taux d'intérêt étant 6 %.

179. Algèbre. — Résoudre $2x = 3y = 4z$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 10.$$

180. — Calculer x donné par la formule :

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{(0,0023)^5} \times \left[\sqrt[7]{73921} - \sqrt[5]{2378}\right]^2}{\left[\sqrt[2]{(2329)^{\frac{3}{4}}} + 25739 2^2\right]\left(\sqrt{\pi^3}\right)^{\frac{1}{3}}}}$$

DEUXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, *par* EMILE MARTIN *et* FÉLIX PERNOT, *à la librairie des sciences générales, 53, rue Monsieur le Prince, 53.*

Ce nouveau cours de Géométrie répond à un besoin. Le programme de Saint-Cyr exigeant l'emploi (presque exclusif) de la Géométrie cotée, il était nécessaire, de mettre entre les mains des candidats, un ouvrage clair pouvant les guider dans cette voie. Mieux que personne, MM. Martin et Pernot étaient désignés pour rédiger un cours répondant à cette nécessité. Anciens élèves de l'École Polytechnique, professeurs tous les deux dans les meilleures écoles préparatoires de Paris, ils ont apporté dans ce travail la méthode scientifique qui caractérise en France l'enseignement donné dans nos grandes écoles, et l'expérience du professeur. D'ailleurs, l'emploi simultané des trois méthodes (méthode cotée et méthodes de Monge) est une innovation qui rend de réels services et aux maîtres et aux élèves. Nous recommandons cet ouvrage avec plaisir et conviction aux candidats à Saint Cyr et Navale. Jusqu'à présent, pas un livre répondant à leurs programmes n'a été rédigé avec cette clarté et cette hauteur de vue qui distingue l'enseignement de MM. Martin et Pernot. G. M.

SOLUTION DE LA QUESTION 37

On donne une surface conique de révolution à deux nappes dont le 1/2 angle au sommet est de 60°. On la coupe par deux plans perpendiculaires à l'axe et dont la distance est h. On obtient ainsi un tronc de cône. Calculer la distance x du sommet à la base la plus éloignée, sachant que le volume de ce tronc est dans un rapport donné m avec celui de la sphère dont le diamètre est h. Discussion.

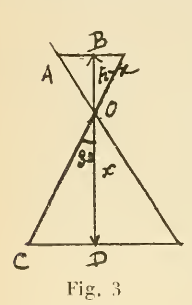


Fig. 3

Il faut trouver x tel que

$$\frac{\text{V. tronc}}{\text{Vol. sphère}} = m.$$

ou

$$\frac{\frac{h\pi}{3}\left(\overline{AB}^2 + CD^2 - AB.CD\right)}{\frac{4}{3}\pi h^3} = m.$$

Nous avons : $CD = X \operatorname{tg} 30°, = x\sqrt{3}$

$AB = (h - x)\sqrt{3}$

en portant dans la valeur de m on a :

$$m = \frac{3(h-x)^2 + 3x^2 - 3x(h-x)}{4h^2}$$

d'où l'équation :

(1) $$9x^2 - 9hx + h^2(3 - 4m) = 0.$$

Discussion :

1°) pour que les racines soient réelles, il faut :

$$36mh^2 - 18h^2 > 0, \quad \text{ou} \quad m - 2 > 0;$$

2°) produit $= h^2(3 - 4m)$ dont le signe est celui de $3 - 4m$;

3°) somme $= h_9$ toujours > 0.

Nous remarquons que les racines de l'équation (1) sont les deux distances OB et OD car si x est racine $h - x$ est aussi racine.

Comme la somme est au > 0 la plus grande racine est positive. Il faut que m soit > 2 pour que les racines soient réelles, le produit est donc < 0, nous voyons qu'elles sont de signes contraires, et que la plus grande dépend du sens adopté sur la droite BD. **E. Drouet.**

SOLUTION DE LA QUESTION 42

Par M. **Léopold Massip**, professeur de Mathématiques Spéciales à l'École Saint-Georges

Etant donné une circonférence tangente aux deux côtés d'un angle droit, mener une troisième tangente qui forme avec les deux autres un triangle maximum ou minimum.

Considérons la tangente supérieure BC : si nous relevons le point B suivant la ligne AB, le triangle formé augmente jusqu'à devenir infini quand la tangente est parallèle à AB ; si nous éloignons le point C suivant AC, la même chose arrive ; donc le triangle a passé par un minimum, et comme tout est symétrique des 2 côtés, il aura lieu pour la tangente à 45°.

De même AMN passe par un maximum dans le même cas.

Pour traiter par le calcul

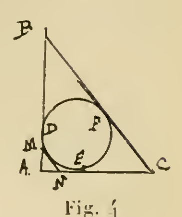


Fig. 4

soit : $AB = y, \quad AC = x$

et posons

(1) $$xy = m^2.$$

On a $BF = y - R \quad CE = x - R.$

Donc

(2) $$(x + y - 2R)^2 = x^2 + y^2.$$

Cette équation renferme les 2 cas ; car elle ne change pas quand on y remplace $x - R$ et $y - R$ par $R - x$ et $R - y$.



L'équation se simplifie et s'écrit :

$$2xy + 4R^2 = 4R(x + y)$$

ou

$$\frac{m^2}{2R} + R = x + y.$$

Donc x et y sont les deux racines de l'équation

$$z^2 - \left(R + \frac{m^2}{2R}\right) z + m^2 = 0.$$

Pour que ces racines soient réelles, il faut que l'on ait

$$\left(R + \frac{m^2}{2R}\right)^2 > 4m^2$$

ou

$$m^4 - 12R^2m^2 + 4R^4 > 0.$$

Décomposons en facteurs :

$$\{ m^2 - 2R^2(3 + 2\sqrt{2})\} \{ m^2 - 2R^2(3 - 2\sqrt{2})\} > 0$$

ce qui exige que l'on ait

$$m^2 - 2R^2(3 - 2\sqrt{2}) < 0,$$

ou

$$m^2 - 2R^2(3 + 2\sqrt{2}) > 0.$$

La première condition donne le maximum $m^2 = 2R^2(3 - 2\sqrt{2})$ et la seconde le minimum $m^2 = 2R^2(3 + 2\sqrt{2})$ x et y sont égaux entre eux et à

$$\frac{m^2 + 2R^2}{4R}$$

ce qui donne pour les valeurs maxima de m^2 :

$$x = y = R(2 - \sqrt{2})$$

et pour la valeur minima : $x = y = R(2 + \sqrt{2})$. **Léopold Massip.**

SOLUTION DE LA QUESTION 74

Par M. **Léopold Massip**, professeur à l'École préparatoire Saint-Georges

Résoudre
$$x^2 - y\sqrt{xy} = a^2$$
$$y^2 - x\sqrt{xy} = b^2,$$

on a :
$$x^2 - a^2 = y\sqrt{xy}$$
$$y^2 - b^2 = x\sqrt{xy}$$

multiplions membre à membre

$$x^2y^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = x^2y^2,$$

d'où : $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$,
d'où $b^2(x^2 - a^2) = - a^2y^2$
de même $(x^2 - a^2)^2 = xy^3$,
on a : $x^2 - a^2 = - \frac{a^2y^2}{b^2}$,
remplaçant : $\frac{a^4y^4}{b^4} = xy^3$ d'où : $\frac{a^4y^4}{b^4} = x$.
Remplaçant dans $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$,
on a : $a^2y^2 + b^2\left(\frac{a^8y^2}{b^8}\right) - a^2b^2 = 0$,
d'où $y^2(b^6 + a^6) = b^8$

$$y^2 = \frac{b^8}{b^6 + a^6} \qquad x^2 = \frac{a^8}{b^6 + a^6}.$$

Léopold Massip.

SOLUTION DE LA QUESTION 83

Un tube de verre, ayant à l'intérieur la forme d'un cylindre droit à base circulaire, a un diamètre intérieur de 2 millimètres à 0° et renferme une colonne de mercure dont la longueur à cette température de 0°, est de 2 décimètres. On demande quelle serait à la température de 20°, la nouvelle longueur de la colonne liquide. Le coefficient de dilatation cubique du mercure est de $\frac{1}{5550}$, *celui du verre de* $\frac{1}{58700}$.

Solution. — Le volume de mercure à zéro a pour expression en millimètres cubes, $\pi \times 200$. A la température de 20°, on a $\pi \times 200 \times \frac{557}{555}$.

A la même température, la base du cylindre de mercure est devenue

$$\pi \times \left(1 + \frac{2 \times 2}{3 \times 3870}\right) = \pi \times \frac{11614}{11610}.$$

La hauteur actuelle de ce cylindre est exprimée, en millimètres, par la fraction

$$200 \times \frac{557}{555} \times \frac{11614}{11610}.$$

Le calcul, effectué par logarithmes, donne pour la hauteur demandée 200mm,65.

Léopold Massip.

TROISIÈME PARTIE

NOTE SUR LA DROITE DE THOMAS SIMPSON

Par M. **Grand**, professeur à l'École Saint-Georges

Le théorème de Simpson employé dans la théorie des transversales n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général ainsi conçu :

Si on mène dans le plan d'un triangle ABC *une transversale quelconque* $\alpha\beta\gamma$ *et qu'aux points ainsi déterminés on mène des droites faisant avec les côtés adjacents des angles égaux, on obtient un triangle* A'B'C' *semblable à* ABC ; *et, de plus, si on joint les sommets homologues, ces*

trois droites concourent en un même point situé à l'intersection des cercles circonscrits aux deux triangles.

En effet, le quadrilatère $A\beta A'\gamma$ est inscriptible, puisque l'on a :

$$\widehat{C\beta A'} = \widehat{A\gamma A'}.$$

Par suite, $\widehat{A'} = \widehat{A}$, on démontrerait que $B = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = C'$.

Les deux triangles ABC et A'B'C' sont donc semblables.

De plus, si nous joignons AA' et BB' qui se rencontrent en un point O, nous voyons que le quadrilatère $B\alpha B'\gamma$ étant inscriptible, on a : $\widehat{B'B\alpha} = \widehat{\alpha\gamma B'}$.

De même, $\beta A\gamma A'$ étant inscriptible, on a : $\widehat{\beta AA'} = \widehat{\beta\gamma A'} = \widehat{B'B\alpha}$.

Le quadrilatère OABC est donc inscriptible, et le point O se trouve sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Il est de toute évidence que, l'intersection de BB' et CC' se trouvant sur ce même cercle ne peut se trouver qu'au point O.

Fig. 5

De plus, A'B'C' étant réciproque de ABC, le point O appartient aussi à son cercle circonscrit. Il est donc à l'intersection de ces deux cercles.

Réciproquement. Etant donnés 2 cercles se coupant en O *et un triangle* ABC *inscrit dans le premier, si on joint les sommets* A, B, C *au point* O, *on forme le triangle* A'B'C' *semblable à* ABC. *Les côtés homologues se coupent en des points* $\alpha\beta\gamma$ *en ligne droite et sous des angles égaux.*

En effet, on a : $\widehat{C'} = \widehat{A'OB'}$ même mesure.

$\widehat{C} = \widehat{AOB}$ même mesure.

D'où $\widehat{C} = \widehat{C'}$

De même, $A = A'$, $B = B'$; les deux triangles sont semblables.

Il en résulte que le quadrilatère $A\gamma A'B$ par exemple est inscriptible, et que l'on a : $\widehat{AB\gamma} = \widehat{AA'\gamma}$

De même pour $\alpha\beta CC'$, et on a :

$$\widehat{\alpha\beta C} = \widehat{\alpha C'C} = \widehat{OC'B'} = \widehat{OA'B'} = \widehat{AA'\gamma}.$$

Les angles $A\beta\gamma$ et $\widehat{\alpha\beta C}$ étant égaux, $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ coïncident en direction.

Donc $\alpha\beta\gamma$ est une ligne droite.

De la considération des quadrilatères inscriptibles tels que $A\beta A'\gamma$, on déduit : $\widehat{C\beta A'} = \widehat{A\gamma A}$ et $\widehat{C\beta A'} = \widehat{C\alpha\beta}$.

Les angles sous lesquels se coupent les côtés homologues sont donc égaux.

Remarque : Si les angles égaux ont une valeur égale à un droit, on a le théorème de Simpson, et la droite $\alpha\beta\gamma$ est la droite de Simpson.

Grand, Professeur de Mathématiques (**Paris**).

NOTE DE TRIGONOMÉTRIE par M. **Rafalli** (Lycée de Pau)

En seconde moderne, pour résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris, le programme prescrit de démontrer géométriquement les

formules de résolution. Dans les ouvrages, actuellement entre les mains des élèves, on construit sur le triangle l'angle $\frac{B-C}{2}$ et on en tire les formules. Mais on a encore besoin d'une autre construction pour la formule

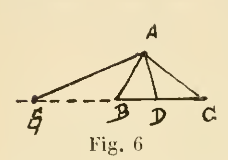


Fig. 6

$$\frac{b-c}{b+c} = \text{tg}\,(45^\circ - m), \quad \text{où} \quad \text{tg}\, m = \frac{c}{b}.$$

Il me semble que la méthode suivante est plus facile à retenir.

Soit ABC un triangle, on suppose connus b, c et A. Soient AD, AE les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A. *Je considère le triangle* ABD *et j'écris la relation des sinus.*

J'obtiens
$$\frac{BD}{\sin DAB} = \frac{C}{\sin ADB}.$$

Or
$$BD = \frac{ac}{b+c}; \quad ADB = 90 - \frac{B-C}{2}.$$

La relation devient donc
$$\frac{ac}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{c}{\cos\frac{B-C}{2}},$$

d'où

(1)
$$a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

En écrivant de même la relation des sinus dans le triangle ABE on obtient la 2e formule

(2)
$$a = \frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.$$

En divisant (1) et (2) membre à membre on obtient enfin

(3)
$$\text{Tg}\,\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\text{g}\,\frac{A}{2}.$$

Les formules (1) (2) (3) résolvent le problème.

Dans la dernière, supposons le triangle rectangle, elle devient en remplaçant B par 90 — C

$$\text{Tg}\,(45^\circ - C) = \frac{b-c}{b+c}, \quad \text{où l'on a} \quad \text{tg}\, C = \frac{c}{b}.$$

C'est la formule employée dans le cas où l'on connaît non pas b et c, mais log b et log c.

SOLUTION DE LA QUESTION 708

On projette un point P d'une corde focale FCD d'une parabole sur les tangentes aux extrémités de cette corde. Démontrer que la droite qui joint ces projections est une tangente à la parabole. (**Lucien Lévy**).

SOLUTION

Les tangentes aux extrémités C, D de la corde focale sont perpendicu-

laires et l'on sait que le sommet A de l'angle droit qu'elles forment est situé sur la directrice.

Si par le point P on mène des parallèles à ces tangentes elles déterminent deux points, C' sur la tangente en C et D' sur la tangente en D, tels que C'D' est tangente à la parabole ; comme C', D' sont les projections orthogonales de P sur les tangentes, la question est démontrée.

Pour déterminer le point de contact de la tangente C'D' on mène la médiane correspondante au sommet A du triangle ACD ; cette médiane coupe la tangente C'D' en un point E, si l'on prend sur cette tangente C'F = D'E, le point F est le point de contact. **Jorge F. d'Avillez.**

Solutions exactes par MM. **Ernest Foucart, Droz-Farny, L'Huillier, Francis Dauzats, St-Goyens.**

THÉORÈME DE KEMPE par M. **Ernesto** à Montévideo.

On donne un losange ABCD, un point O sur une de ses diagonales ; on forme ainsi un quadrilatère AOCD à diagonales rectangulaires ; sur OC considéré comme côté homologue de CD, on construit un quadrilatère OCLM semblable à DAOC, prouver que la droite AM est perpendiculaire sur AB.

Fig. 7

DÉMONSTRATION

Puisque MOCL est semblable à COAD, les angles correspondants de ces quadrilatères sont égaux.

Faisons

$$BAC = OMC = a ; \quad OAC = OCA = CML = b.$$

$$AOC = MLC = f \begin{cases} PML = c, \\ PAC = d, \\ APC = h. \end{cases}$$

Le triangle MOA est isoscèle ; donc $OMA = OAM = b + d$.

On a aussi $$OMA + OML + LMP = 2dr,$$

ou $$b + d + a + b + c = 2dr,$$

ou encore

(1) $$2b + a + d + c = 2dr.$$

Mais $2b + f = 2dr$ et $h + c = f$.

(1) devient successivement

$$2b + a + d + c = 2b + f \quad \text{ou} \quad a + d + c = f,$$

ou enfin $a + d + c = h + c$, ce qui donne $a + d = h$.

Donc BAP = APC.

A cause des parallèles AB et DC, on a aussi BAP = APD.

Par suite APC = APD.

Chacun de ces deux angles vaut donc 1dr.

Donc AP est perpendiculaire sur DC et par suite sur sa parallèle AB.

Fig. 8

On donne un triangle ABC ; on trace BD qui divise AC en deux parties AD = m ; DC = n ; du même point B on porte sur

BC une longueur BL $= s$, et sur BA une longueur BF $= p$; on trace LF. Dans quel rapport la droite BD divise-t-elle la sécante LF ?

SOLUTION

Les deux triangles BFE, BEL ayant même hauteur sont entre eux comme leur base.

On a donc $$\frac{BFE}{BEL} = \frac{FE}{EL}.$$

D'autre part, on peut écrire $\frac{BFE}{BAD} = \frac{BF \times BE}{BA \times BD}$, et $\frac{BDC}{BEL} = \frac{BD \times BC}{BE \times BL}$.

En multipliant entre eux ces deux rapports, et en se rappelant que $\frac{BDC}{ABD} = \frac{n}{m}$, on obtiendra successivement

$$\frac{BFE}{BEL} \times \frac{BDC}{BAD} = \frac{BF.BE.BD.BC}{AB.BD.BE.BL} = \frac{p.a}{s.c}$$

ou $$\frac{FE}{EL} \times \frac{n}{m} = \frac{pa}{sc}.$$

D'où

(1) $$\frac{FE}{EL} = \frac{mp}{ns} \cdot \frac{a}{c}.$$

REMARQUES : I — Pour BD médiane, $m = n$, et le rapport (1) devient

(2) $$\frac{FE}{EL} = \frac{p}{s} \cdot \frac{a}{c}.$$

II. — Si, en même temps que $m = n$, on a aussi $p = s$, il vient

(3) $$\frac{FE}{EL} = \frac{a}{c}.$$

Ce qui justifie le théorème connu :

La médiane BD d'un triangle ABC coupe la corde FL d'un arc décrit du sommet B et limité aux côtés du triangle en deux parties FE, FL dont le rapport est inverse de celui des côtés AB, BC.

III. — Pour $s = a$, le rapport (1) se réduit à $\frac{FE}{EC} = \frac{mp}{nc}$.

Il semble bon d'établir directement cette propriété à cause des conséquences qu'on en peut tirer.

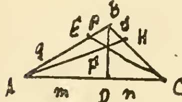


Fig. 9

On donne un triangle ABC ; on trace BD qui divise AC en deux parties AD $= m$, DC $= n$; on trace aussi CE qui divise AB en deux parties AE $= q$, EB $= p$.

Déterminons les rapports $\frac{EF}{FC}$, $\frac{DF}{FB}$, F étant le point de rencontre des lignes BD et CE.

SOLUTION

On peut écririre immédiatement $\frac{BEF}{BFC} = \frac{EF}{FC}$.

On a aussi $$\frac{BEF}{BAD} = \frac{BE.BF}{BA.BD}, \quad \frac{BDC}{BFC} = \frac{BD}{BF}.$$

En multipliant entre eux ces deux derniers rapports, il vient

$$\frac{BEF}{BFC} \times \frac{BDC}{BAD} = \frac{BE.BF.BD}{BA.BD.BF} = \frac{p}{c}.$$

Comme $\frac{BEF}{BFC} = \frac{EF}{FC}$, et $\frac{BDC}{BAD} = \frac{n}{m}$, on obtient $\frac{EF}{FC} \times \frac{n}{m} = \frac{p}{c}$.

D'où

(1) $$\frac{EF}{FC} = \frac{mp}{nc}.$$

On aurait de même

(2) $$\frac{DF}{FB} = \frac{qn}{pb}.$$

Remarques. I. — Joignons A au point F si le point H où AE rencontre BC divise cette ligne en deux parties BH $= s$, HC $= r$, on aura aussi

(3) $$\frac{HF}{AF} = \frac{pr}{qa} = \frac{ns}{ma}.$$

Dans ce cas, on aurait

(4) $$\left\{ \frac{EF}{FC} = \frac{mp}{nc} = \frac{sq}{rc}, \quad \frac{DF}{FB} = \frac{qn}{pb} = \frac{rm}{sb}, \quad \frac{HF}{FA} = \frac{pr}{qa} = \frac{ns}{ma}. \right.$$

II. — Si le point F était extérieur au triangle ABC, on obtiendrait les mêmes relations (4), en employant les mêmes notations.

Ainsi pour BE $= p$, AE $= q$, AD $= m$, DC $= n$, BM $= s$, CH $= r$, on aura

(4bis) $$\left\{ \frac{EF}{FC} = \frac{mp}{nc} = \frac{sq}{c}, \quad \frac{DF}{FB} = \frac{qn}{pb} = \frac{rm}{sb}, \quad \frac{HF}{FA} = \frac{pr}{qa} = \frac{ns}{ma}. \right.$$

Démontrons-le pour l'un de ces rapports, par exemple $\frac{EF}{FC}$.

On a comme auparavant $\frac{BEF}{CBF} = \frac{EF}{FC}$, $\frac{BEF}{BAD} = \frac{BE.BF}{BA.BD}$, $\frac{BDC}{BFC} = \frac{BD}{BF}$.

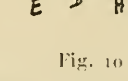


Fig. 10

Multipliant entre eux ces deux rapports, simplifiant $\frac{BEF}{BFC}$ par $\frac{EF}{BC}$ et $\frac{BDC}{BAO}$ par $\frac{m}{n}$, il vient

$$\frac{EF}{FC} \cdot \frac{n}{m} = \frac{p}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{EF}{FC} = \frac{mp}{nc}.$$

CONSÉQUENCES

I. — L'un quelconque des rapports (4) et (4bis) donne

$$mpr = nsq.$$

Ce qui démontre le théorème de Céva.

II. — Ces relations peuvent aussi s'employer pour démontrer le théorème de Ménélaüs.

1er *Cas*. — La sécante EFD coupe deux côtés et le prolongement du troisième. Soit le triangle ABC et la sécante AD. Joignons BD, AF.

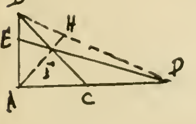


Fig. 11

Les relations (4) donnent

$$\frac{CF}{BF} = \frac{HD.AC}{BH.AD} = \frac{AE.CD}{BE.AD}.$$

On en tire $$\frac{HD}{BH} = \frac{AE.CD}{AC.BE}.$$

Ce qui donne

$$\frac{CE}{BF} = \frac{AE.CD}{AC.BE} \times \frac{AC}{AD} = \frac{AE.CD}{BE.AD}.$$

Donc $$CF.BE.AD = BF.AE.CD.$$

2[e] *Cas.* — La sécante EDF coupe le prolongement des trois côtés. Soit le triangle ABC et la sécante ED. Traçons AF. On a

$$\frac{BC}{CF} = \frac{ED.AB}{DF.AE} \quad \text{ou} \quad \frac{BF}{CF} = \frac{ED.AB + DF.AE}{DF.AE}.$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB.EF}{BE.DF} \quad \text{ou} \quad \frac{AD}{CD} = \frac{AB.EF + BE.DF}{BE.DF},$$

$$\frac{BF}{CF} \times \frac{CD}{AD} = \frac{ED.AB + DF.AE}{DF.AE} \times \frac{BE.DF}{AB.EF + BE.DF}$$

$$= \frac{BE}{AE} \times \frac{ED.AB + DF.AE}{AB.EF + BE.DF}.$$

Fig. 12

Mais $ED.AB + DF.AE = AB.EF + BE.DF.$

Car, en le supposant vrai, on obtiendrait

$$DF.AE - DF.BE = AB.EF - AB.ED,$$

ou $$DF(AE - BE) = AB(EF - ED),$$

ou $$DF.AB = AB.DF, \text{ ce qui est évident.}$$

Ainsi donc $$\frac{BF}{CF} \times \frac{CD}{AD} = \frac{BE}{AE}, \quad \text{ou} \quad BF.CD.AE = CF.AD.BE.$$

Le théorème de Ménélaüs se trouve ainsi vérifié.

III. — Soit F, le point de rencontre de deux médianes CE, BD. Dans ce cas, on a

$$m = n = \frac{b}{2}; \quad p = q = \frac{c}{2}.$$

On aura

$$\frac{EF}{FC} = \frac{mp}{nc} = \frac{m.\frac{c}{2}}{m.c} = \frac{1}{2}.$$

De même, en appelant F', le point où la médiane AH' rencontrerait CE, on aurait aussi $BH' = s' = H'C = r'$. Et on obtiendrait également

$$\frac{EF'}{F'C} = \frac{s'q}{r'c} = \frac{s'\frac{c}{2}}{s'c} = \frac{1}{2}.$$

Donc le point F' se confond avec F. Et les trois médianes se coupent au même point.

$$\frac{EF + FC}{FC} = \frac{1 + 2}{2}\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{FC}{CE} = \frac{2}{3},$$

et ce point est situé aux $\frac{2}{3}$ de chacune d'elles à partir du sommet.

IV. — Soit encore F le point de rencontre de deux hauteurs BD, AH et appelons F', le point de rencontre des hauteurs BD et CE'; cette dernière divisant le côté AB en deux parties $AE' = q'$, $BE' = p'$.

Les triangles semblables CE'B et ABH donnent $\frac{p'}{a} = \frac{s}{c}$.

De même AHC et BDC » $\frac{r}{b} = \frac{n}{a}$,

» ABD et AE'C » $\frac{m}{c} = \frac{q'}{b}$.

En les multipliant on obtient $p'rm = snq'$ ou $\frac{rm}{s} = \frac{q'n}{p'}$.

Mais, en appliquant les relations (4) précédentes, on a

$$\frac{FD}{BF} = \frac{rm}{sb} \quad \text{et} \quad \frac{F'D}{BF'} = \frac{qn'}{p'b}.$$

En remplaçant $\frac{qn'}{p'}$ par sa valeur $\frac{rm}{s}$, il vient $\frac{F'D}{BF'} = \frac{rm}{sb}$.

Donc $\frac{F'D}{BF'} = \frac{FD}{BF}$ et F′ se confond avec F. Par suite, les trois hauteurs d'un triangle se coupent au même point.

Remarque. — On trouverait facilement les relations suivantes :

$$\frac{BD}{BF} = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{2b^2(a^2 + c^2 - b^2)}$$

$$\frac{CE}{FE} = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{2c^2(a^2 + b^2 - c^2)}$$

$$\frac{AH}{AF} = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{2a^2(b^2 + c^2 - a^2)}.$$

V. — Soient BD bissectrice de B, AH bissectrice de A, CE′ bissectrice de C, F le point de rencontre des bissectrices BD et AH, F′ le point de rencontre de BD et CE′. Les relations (4) donnent :

$$\frac{FD}{BF} = \frac{r}{s} \cdot \frac{m}{b} \quad \text{et} \quad \frac{F'D}{BF'} = \frac{q'}{p'} \cdot \frac{n}{b}$$

(en appelant q' et p' les deux segments de AB, m et n ceux de AC, r et s ceux de BC).

On a $$\frac{r}{s} = \frac{b}{c}; \quad \frac{q'}{p'} = \frac{b}{a}; \quad \frac{m}{n} = \frac{a}{c};$$

$$\frac{m}{n+m} \text{ ou } \frac{m}{b} = \frac{c}{a+c} \quad \text{et} \quad \frac{n}{m+n} \text{ ou } \frac{n}{b} = \frac{a}{a+c}.$$

Par suite

$$\frac{FD}{BF} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a+c} = \frac{b}{a+c}.$$

$$\frac{F'D}{BF'} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{a+c} = \frac{b}{a+c}.$$

Donc $\frac{FD}{BF} = \frac{F'D}{BF'}$, et F′ se confond avec F. Par conséquent, les trois bissectrices d'un triangle se coupent au même point.

Remarques. I. — Les segments des bissectrices seront exprimés par les rapports suivants :

$$\frac{FD}{BF} = \frac{b}{a+c} \quad \text{ou} \quad \frac{BD}{BF} = \frac{a+b+c}{a+c},$$

$$\frac{FE}{CF} = \frac{c}{a+b} \quad \text{ou} \quad \frac{CE}{EF} = \frac{a+b+c}{a+b},$$

$$\frac{FH}{AF} = \frac{a}{b+c} \quad \text{ou} \quad \frac{AH}{AF} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

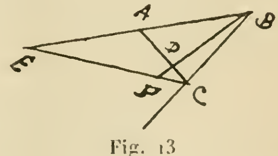


Fig. 13

II. — On démontrerait de même que les bissectrices de B et des angles extérieurs en A et en C se coupent au même point. En appelant F ce point on aurait de même

$$\frac{FD}{BF} = \frac{b}{a+c}$$

et en appelant F′ le point de rencontre de la bissectrice de A et de celles

des angles extérieurs en B e] en C; F′ le point de rencontre des bissectrices de C et des angles extérieurs en A et en B, on aura les trois relations :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{FD}{BF} = \frac{b}{a + c} \text{ ou } \frac{FD}{BD} = \frac{b}{a + c - b} \text{ ou } \frac{BD}{BF} = \frac{a + c - b}{a + c} \\ \frac{F'H}{AF'} = \frac{a}{b + c} \text{ ou } \frac{F'H}{AA} = \frac{a}{b + c - a} \text{ ou } \frac{AH}{AF'} = \frac{b + c - a}{b + c} \\ \frac{F''E}{CF''} = \frac{c}{a + b} \text{ ou } \frac{F''E}{CE} = \frac{c}{a\ b - c} \text{ ou } \frac{CE}{CF''} = \frac{a + b - c}{a + b}. \end{array}\right.$$

VI. — (4) et (4bis) donnent

$$\frac{EF.FD.HF}{FC.BF.AF} = \frac{mpr}{abc} = \frac{nsq}{abc}$$

Hermano Ernesto.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

SUR LES PROBLÈMES D'ALGÈBRE

De MM. **Henri Neveu** et **Charles Cochez**

La librairie Larousse met en vente les *Problèmes d'Algèbre* à l'usage des candidats à Saint-Cyr. L'autorité acquise par les auteurs de ce livre (MM. Henri Neveu et Charles Cochez) en tout ce qui concerne les matières de l'examen à l'Ecole spéciale militaire de Saint-Cyr, doit encourager les élèves et les candidats, qui désirent passer brillamment leurs examens, à prendre connaissance de ce recueil L'ordre et la clarté qui y règnent le distinguent de tous les recueils similaires. En un mot c'est un ouvrage bien fait que nous signalons avec plaisir à l'attention des professeurs et des élèves. **G. M.**

Le Directeur-gérant,

Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE ST-CYR

181. — 1° Inscrire dans un triangle ABC rectangle en A une droite B'C' de longueur K s'appuyant sur AB et AC et telle que, en menant en C' et B' les perpendiculaires aux côtés AB et AC ces perpendiculaires se coupent en A' sur BC. — Solutions algébrique et géométrique. Variation de la surface A'B'C' lorsque K varie.

2° On donne deux circonférences C et C' de rayon R et R'. Mener par leur centre S de similitude directe une droite sur laquelle la circonférence C intercepte une corde BD = l et calculer la corde B'D' interceptée sur cette même droite par la circonférence C'.

Charles Cochez.
Professeur du Cours de Saint-Cyr à l'Ecole préparatoire Saint-Georges.

182. Epure. — Le sommet d'un cône de révolution de côte 12 se projette au centre de la feuille. La circonférence de base a 0,05 de rayon, ce cône est limité par un plan horizontal de côte 20. Un point C de côte 12 situé à une distance 0,05 du sommet se projette sur la parallèle aux petits côtés du cadre passant par le centre de la feuille. Par le point C_{12} passent trois plans, le premier a sa trace horizontale tangente au cercle de base en un point C_1 diamètralement opposé au point C. Le deuxième a sa trace parallèle à la précédente et passe par le point O. Cette trace rencontre la base du cône aux points BD. Le troisième plan a sa trace passant par B et le milieu de l'arc BS. Solide commun au cône et au trièdre ainsi défini.

Léopold Massip,
Professeur de Mathématiques Spéciales à l'Ecole Saint-Georges.

Lire à la quatrième page de la couverture les conditions relatives à la correction et à l'abonnement des copies.

183. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle connaissant

$$a = 8344{,}27 \qquad b = 5862{,}55 \qquad C = 128°47'35''.$$

184. Questions d'oral. — *a*) Trouver le cercle dans lequel on ne peut entrer.

b) Déterminer la hauteur d'un triangle dont on connaît les trois côtés mais dont l'intérieur est inaccessible.

c) Calculer le rayon de la sphère connaissant les rayons des deux bases ainsi que sa hauteur.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

185. — A l'intérieur d'une circonférence on donne un point P. En ce point se trouve une balle élastique. Dans quelle direction faut-il lancer cette balle pour qu'elle revienne à son point de départ après avoir frappé trois fois la circonférence ?

Solution algébrique et géométrique.

Léon Bach,
expert-géomètre à Cahors.

186. — Si dans un triangle on a : $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$ le triangle est isocèle.

187. — Calculer par logarithmes

$$x = \frac{Am\,(1+\alpha)^p}{(1+\beta)p-2}$$

pour $A = 38500 \quad \alpha = 0{,}038 \quad p = 11 \quad \beta = 0{,}035.$

188. Physique et Chimie. — Un baromètre a été observé à deux époques différentes et a donné 770 millimètres à 25° et 760 millimètres à 5°.

On demande le rapport entre les deux hauteurs corrigées.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHÉMATIQUES

189. Mathématiques. — Couper un cône par un plan de façon que la section elliptique ait une aire maximum.

190. (*Au choix*). — *a*) Résolution trigonométrique de l'équation du second degré.

b) Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers zéro.

c) Problème de la carte.

190bis. Physique. — Deux miroirs AB et CD inclinés ont leurs faces réfléchissantes en regard ; un rayon lumineux se réfléchit d'abord sur AB suivant IH puis sur CD suivant HR. Démontrer que l'angle δ formé par la direction du rayon incident avec celle du rayon deux fois réfléchi est toujours double de l'angle α des deux miroirs.

191. (*Au choix*). — *a*) Rosée, pluie, neige.

b) Hygromètre de condensation.

c) Ebullition, distillation.

IV. — BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

192. Mathématiques. — Déterminer a de manière que les deux équations

$$ax^2 - (5 + a)\,x + 6 = 0 \qquad 2ax^2 - (5a + 1)\,x + 6 = 0$$

aient une racine commune dont on donnera la valeur.

192bis. (*Au choix*). — *a*) Condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette suivant un angle droit.

b) Projection d'une hélice sur un plan parallèle à l'axe.

c) Projection d'un cercle.

193. Physique. — Trouver la longueur d'un tuyau d'orgue ouvert dont le son fondamental est à l'unisson avec le diapason normal.

193bis. (*Au choix*). — *a*) Notions très sommaires de photographie.

b) Notions générales sur les phénomènes d'émission, de réflexion, de transmission de la chaleur rayonnante.

c) Composition de la lumière blanche.

V. BACCALAURÉAT (LETTRES. — SCIENCES)

Trouver la dérivée de

$$y = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}.$$

$$y = x \sin.\, x + \cos.x$$

194bis. (*Au choix*). — *a*) Formule d'addition des arcs.

b) Duplication et bissection des arcs.

c) Théorème des projections.

195. Physique. — Un tuyau fermé de $0^m,50$ de longueur donne l'harmonique 3. Quel est le rang de cet harmonique dans l'échelle musicale.

195bis. (*Au choix*). — *a*) Machine d'Atwood.

b) Pendule. — Applications.

c) Densité des gaz.

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

196. — Le colza d'hiver rend en moyenne 32 $^0/_0$ de son poids d'huile et la navette d'été 30 $^0/_0$. Dans une fabrique on a obtenu avec 4 700 kilogrammes de graines des deux espèces 1 468 kilogrammes d'huile. 1° Combien a-t-on employé de kilogrammes de graines de chaque espèce? Combien a-t-on obtenu d'huile de chaque espèce ?

197. — Quelle est la surface d'un trapèze dont la hauteur a 12 mètres et les bases $48^m,50$ et 25.

198. — Calculer x $\frac{\sqrt[7]{3789} + \sqrt[3]{27004} + \sqrt[4]{6745}}{\sqrt[3]{0,0012} + \sqrt{7777} - \sqrt{0,0050}}$.

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

199. — Pour obtenir une tonne de fer brut une usine emploie 1 130 kilogrammes de fonte à 130 francs la tonne et 750 kilogrammes de houille à 32 francs la tonne ; elle paie en outre 12 francs pour la main-d'œuvre ; elle a produit 2777630 kilogrammes de fer brut ; on demande ce qu'elle a dû dépenser en tout tant pour la fonte que pour le combustible et la main-d'œuvre.

200. Algèbre. — Vérifier l'identité

$$(a^2 + b^2 + ab)^2 = a^2 (a + b)^2 + b^2 (a + b)^2 + a^2b^2.$$

200bis. — Même calcul qu'au numéro 198.

DEUXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Récréations et Problèmes de Mathématiques des temps anciens et modernes, par W. W. RAUSE BALL, traduites par J. FITZ-PATRICK (Librairie scientifique *A. Hermann*, 8, rue de la Sorbonne).

Quelques pédagogues ont soutenu qu'il y a deux manières d'enseigner les mathématiques : La première consistant, comme on le fait en France, à énoncer les théorèmes pour les démontrer ensuite, en évitant une objection de la part de l'élève. La seconde, employée par quelques professeurs anglais, consisterait à émettre des idées fausses pour permettre aux élèves de les discuter, à faire des fautes de calcul ou de raisonnement habilement cachées, lesquelles conduisent à la démonstration de choses absurdes afin de laisser aux jeunes intelligences le plaisir et le soin de découvrir l'erreur. Nous rappelons ces procédés à propos des *Recréations Mathématiques* que M. FITZ-PATRICK vient de traduire.

La lecture de cet ouvrage nous a fort intéressé. Les quelques problèmes de géométrie où l'auteur démontre qu'un segment de droite égale la droite entière, que tous les triangles sont isoscèles sont habilement établis et la sagacité du lecteur est fort exercée.

Les carrés magiques, les problèmes des jeux, le problème des huit reines, des quinze écolières.......... sont des chapitres à lire ; ils intéresseront et les gens du monde, et les mathématiciens. Nous recommandons la lecture de cet ouvrage à tous les élèves des classes de sciences, même aux candidats à Polytechnique, Centrale, Normale ; elle ne peut que leur délier l'esprit, et elle leur montrera quelle critique il faut apporter dans les raisonnements, quelle attention il faut donner au calcul. **G. M.**

Nota. — Lire dans le *Journal de Mathématiques Spéciales* l'article blibliographique consacré à *La Mathématique* de LAISANT (Librairie *Carré et Naud*, 3, rue Racine).

SOLUTION DE LA QUESTION 106

Par **Léonce Gerlach**, à Digne

Construire $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Ecrivons $x = t\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ $(t = 1)$.

Décrivons le cercle de rayon $t = 1$. Prenons M milieu de OA'. BB' perpendiculaire en $M = \sqrt{3} = A'B''$. Rabattons A'B'' en A'D, $AD = 2 - \sqrt{3}$ et on a $x = t\sqrt{AD}$, $x^2 = t.AD$, x est donc une moyenne proportionnelle entre t et AD. On mène I tangent au cercle OD et $AI = x$.

Construire $x = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}}$, on a $x = t\sqrt{\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}}$ $(t = 1)$. Décrivons

le cercle de rayon I. Construisons de même $\sqrt{3}$, joignons OB et traçons OD

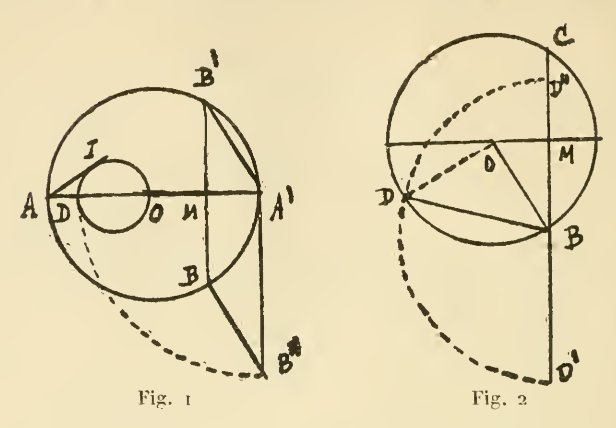


Fig. 1 Fig. 2

perpendiculaire à OB, $DB = \sqrt{2}$. Rabattons BD en BD', $CD' = \sqrt{3} + \sqrt{2}$. De même $CD'' = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ et on a $x = t\sqrt{\frac{CD'}{CD''}}$, $\frac{x^2}{t^2} = \frac{CD'}{CD''}$.

SOLUTION DE LA QUESTION 121

Par **Crut**

On donne deux circonférences tangentes extérieurement de rayons R *et* r. *On mène la tangente commune* AB (A *sur la circonférence de rayon* R *et* B *sur celle de rayon* r). *Soit* C *le point de contact des deux circonférences : on forme le triangle* ACB. *Démontrer que ce triangle est rectangle et exprimer ses côtés en fonction de* R *et* r. **Léopold Massip.**

Soient O et O' les centres des cercles de rayons R et r, I le milieu de AB. La tangente en C aux deux circonférences passe par le point I. On a donc $CI = IA = IB$, ce qui indique que le point C est situé sur la circonférence de diamètre AB. Le triangle ACB est donc rectangle en C.

Calculons d'abord l'aire du triangle ACB. Soit H la projection de C sur AB. On a $\frac{CH}{CS} = \frac{r}{O'S} = \frac{R}{OS} = \frac{R-r}{R+r} = \frac{R-CH}{OS-CS} = \frac{R-CH}{R}$.

La comparaison du 4[e] et du 6[e] rapport donne immédiatement

$$CH = \frac{2Rr}{R+r}. \quad \text{On a aussi } IB = \sqrt{Rr}.$$

On a donc pour l'aire S du triangle ACB

$$S = CH \times IB = \frac{2Rr\sqrt{Rr}}{R+r} = \frac{1}{2}.AC.CB.$$

Il en résulte que les côtés AC et CB sont donnés par les équations

$$AC.CB = \frac{4Rr\sqrt{Rr}}{R+r}, \quad \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = 4Rr.$$

On en déduit $(AC + CB)^2 = \frac{4Rr(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}{R + R}$, $(AC - CB)^2 = \frac{4Rr(\sqrt{R} - \sqrt{r})^2}{R + r}$,
et, par suite, les trois côtés du triangle ACB s'écrivent

$$AC = \frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R + r}}, \quad BC = \frac{2r\sqrt{R}}{\sqrt{R + r}}, \quad AB = 2\sqrt{Rr}.$$

(Crut).

TROISIÈME PARTIE

Questions diverses

Un quadrilatère articulé, plan et vertical, repose, par son côté AD = d *sur une droite horizontale. Les côtés* a, b, c, d *ont une section infiniment petite, et des poids proportionnels à leurs longueurs,* ε *étant le poids de l'unité.*

Démontrer que si l'on a la relation :

$$\frac{(a + b)\cos A}{d \sin A - c \sin (A + D)} = \frac{(c + b)\cos D}{d \sin D - a \sin (A + D)},$$

le quadrilatère est en équilibre.

Calculer les réactions Q *et* Q' *détruites aux points* A *et* D.

Et vérifier que, dans la position d'équilibre, le centre de gravité du périmètre mobile a + b + c *est le plus haut (équilibre instable) ou le plus bas possible (équilibre stable ; figure symétrique par rapport à l'horizontale) eu égard aux mouvements compatibles avec les articulations du système.*

1° Soit ABCD la figure d'équilibre du quadrilatère articulé et vertical, reposant par son côté d sur l'horizontale fixe AD. Prolongeons les côtés opposés AB et DC jusqu'à leur rencontre en S. Les conditions d'équilibre ne seront modifiées en rien, si l'on suppose que SBA et SCD soient rigides.

Fig. 3

Or, le poids $a\varepsilon$ appliqué au milieu M de AB peut se décomposer en $\frac{1}{2}a\varepsilon$ appliqué en A, détruit par la fixité de l'horizontale, et en $\frac{1}{2}a\varepsilon$ appliqué en B. Parallèlement, le poids $c\varepsilon$ appliqué en P, milieu de CD, se décompose en $\frac{1}{2}c\varepsilon$, détruit en D, et en $\frac{1}{2}c\varepsilon$ appliqué en C.

Soit I le point d'application de la résultante des trois forces verticales $\frac{a\varepsilon}{2}$, $\frac{c\varepsilon}{2}$ et $b\varepsilon$ ayant respectivement leurs points d'application en B, C et N

milieu de BC. Pour que cette résultante soit détruite, il faut que la verticale menée par S passe par I; les composantes Q et Q' de ce poids $\frac{1}{2}(a+c+2b)\varepsilon$, suivant les directions SA et SD seront détruites sur BA et CD par les réactions égales et contraires.

Or $$\frac{IB}{IC}=\frac{LH}{LK}=\frac{c+b}{a+b}, \quad \text{d'où}$$

(1) $$\frac{LH}{c+b}=\frac{LK}{a+b}=\frac{d-a\cos A-c\cos C}{a+c+2b},$$

H et K étant les projections de B et C, d'autre part :

$$SL = LA \operatorname{tg} A = LD \operatorname{tg} D,$$

d'où $$(a\cos A + LH \operatorname{tg} A) = (c\cos C + LK) \operatorname{tg} D,$$

en remplaçant, dans cette dernière, les expressions de LH et LK tirées de (1), on arrivera, après simplifications, à l'équation proposée.

On calculera Q et Q' par les relations

$$\frac{Q}{\cos D}=\frac{Q'}{\cos A}=\frac{\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}+b\right)\varepsilon}{\sin(A+D)}.$$

Les réactions totales développées en A et D sont donc respectivement : Q dirigée suivant AS, composée avec la force verticale $-\frac{1}{2}a\varepsilon$, et Q' dirigée suivant DS, composée avec la force verticale $-\frac{1}{2}c\varepsilon$.

2° Actuellement déformons le quadrilatère selon les mouvements compatibles avec les articulations, lesquels, pour B ou C, se réduisent à une rotation autour de A ou D. Remplaçons par x et y les angles variables BAD et CDA, et désignons par Y la distance à AD du centre de gravité du périmètre pesant $a+b+c$. En prenant les moments par rapport à AD, on aura, après suppression du facteur commun ε,

$$Y(a+c+2b) = a\frac{a}{2}\sin x + b\left(\frac{a\sin x + c\sin y}{2}\right) + c\frac{c}{2}\sin y$$
$$= \frac{a}{2}(a+b)\sin x + \frac{c}{2}(c+b)\sin y,$$

d'où en prenant la dérivée des deux membres par rapport à une variable indépendante dont x et y seraient fonctions :

$$2(a+c+2b)\frac{dY}{du} = a(a+b)\cos x\frac{dx}{du} + c(c+b)\cos y\frac{dy}{du}.$$

Mais x et y sont liées par la relation :

(2) $$d - a\cos x - c\cos y = \sqrt{b^2-(a\sin x - c\sin y)^2}, \quad \text{d'où}$$

(3) $$a\sin x\frac{dx}{du} + c\sin y\frac{dy}{du} = -\frac{(a\sin x - c\sin y)\left(a\cos x\frac{dx}{du} - c\cos y\frac{dy}{du}\right)}{d - a\cos x - c\cos y},$$

or, le maximum ou le minimum de Y satisfont à :

(4) $$a(a+b)\cos x\frac{dx}{du} + c(c+b)\cos y\frac{dy}{du} = 0,$$

en éliminant le rapport $\frac{dy}{du} = \frac{dx}{du}$ entre (3) et (4) on arrivera bien à l'équation : $$\frac{(a+b)\cos x}{d\sin x - c\sin(x+y)} = \frac{(c+b)\cos y}{d\sin y - a\sin(x+y)},$$

la même que l'équation proposée. Cette dernière, jointe à (2), fera connaître les angles x et y, c'est-à-dire l'élément de la figure d'équilibre.

H. Lecocq.
ancien professeur au lycée d'Avignon.

Etant données quatre droites AB, BC, CD, DE, *déterminer la position d'un point* P (*fig.* 2) *tel que les symétriques* P_1, P_2, P_3, P_4, *de* P *par rapport à ces lignes soient sur une même droite.*

Le problème inverse qui consiste à trouver la position des quatre droites, connaissant le point P et les quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 se résout immédiatement en menant des perpendiculaires au milieu de PP_1, PP_2, PP_3 et PP_4.

Pour découvrir la solution du problème proposé, cherchons d'abord le lieu géométrique des points P (*fig.* 1) dont les symétriques P_1, P_2, P_3, par rapport aux trois droites données AB, BC, CD soient en ligne droite.

Observons d'abord que les points B, C et E point de rencontre de AB et DC, font partie du lieu, puisque, dans ces positions, P coïncide avec deux de ses symétriques, et il est facile de démontrer que le lieu cherché est la circonférence O circonscrite au triangle BEC. En effet, soient O_1, O_2, O_3, les symétriques de O par rapport aux côtés BC, CE et BE de ce triangle; décrivons, de ces points comme centres, des circonférences égales à la première; elles se couperont en un point I, point de rencontre des trois hauteurs du triangle BEC.

Par le point I menons une droite quelconque qui rencontre en P_1, P_2, P_3 les circonférences O_1, O_2, O_3 et soit P le symétrique de P_1 par rapport à BC. Les figures OIO_2C et O_1IO_3B sont des losanges. Tirons O_1P_1 et menons O_2H et O_3K parallèles à cette ligne, les droites CH et BK seront égales et parallèles à IP_1. Il résulte de là que l'arc P_1IC, ou son symétrique PC est égal à l'arc CHP_2; donc P est le symétrique de P_2 par rapport à CD. On verrait de même que P est le symétrique de P_3 par rapport à BA. La propriété est donc démontrée.

Cela étant, la solution du problème proposé se trouve aisément. Considérons (*fig.* 2) les trois premières droites AB, BC et CD, et menons le cercle circonscrit au triangle BEC; puis, les trois droites BC, CD, DE et menons le cercle circonscrit au triangle CFD. Soit P le point de rencontre des deux circonférences décrites; P est le point cherché, car P_1, P_2, P_3, d'une part, et P_2, P_3, P_4, d'autre part sont en ligne droite; donc les quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 le sont. Cette ligne passe par les points de rencontre M et N des trois hauteurs de chacun des triangles BEC et CFD. **H. Lecocq.**

Corollaire I. — Si d'un point quelconque de la circonférence circonscrite à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les trois pieds sont en ligne droite.

Corollaire II. — Si du centre O du cercle circonscrit à un quadrilatère inscriptible on abaisse une perpendiculaire OP sur la troisième diagonale, les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les quatre côtés du quadrilatère sont en ligne droite.

NOTE DE MÉCANIQUE

Par M. **Léopold Massip**, professeur de Mathématiques spéciales
à l'Ecole préparatoire Saint-Georges

Les élèves retiennent fort peu la démonstration du parallélogramme des forces : nous proposons la démonstration suivante qui nous semble plus simple : soit la force AB contenant 3 fois la force OB. Décomposons la force OA en trois forces égales à OB appliquées en O, O_1, O_2; les forces OB et OO_1, étant égales ont une résultante dirigée suivant OB'. Je transporte le point

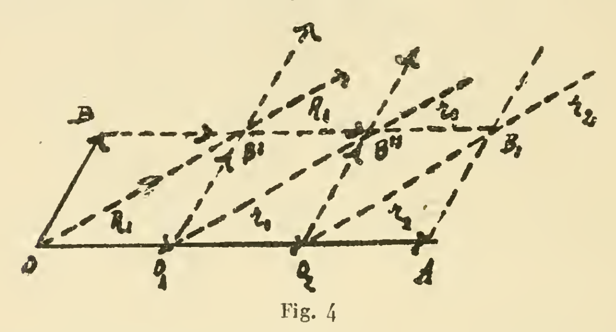


Fig. 4

d'application O de cette force en B' suivant B'R'. En B' je remplace la force B'R' par deux forces B'B'' et B'O'. Je transporte la force B'O' suivant O_1B' et la force B'B'' suivant BB'. Je recommence la même opération pour chacune des forces O_1O_2 et O_2OA. **Léopold Massip.**

APPLICATION DES RELATIONS MÉTRIQUES

ET TRIGONOMÉTRIQUES ENTRE LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET ANGULAIRES DU QUADRILATÈRE INSCRIT COMPLET

Par M. **H. Lecocq**

Les données α, β, γ, δ, qu'elles soient primitives ou consécutives, et dépendant alors, par les tableaux du n° 17 des côtés du quadrilatère ou des autres éléments tels que diagonales et angles qui en sont des fonctions connues, permettent de résoudre, par des procédés plus réguliers et uniformes, les différents cas de détermination de la figure ; la construction finale est alors des plus simples et toujours la même, lorsqu'on a réussi à résoudre les inconnues ou variables α, β, γ, δ en fonction des constantes qui caractérisent l'espèce du cas proposé.

Mais la multiplicité des éléments considérés et introduits simultanément dans un problème posé amène parfois ce résultat qu'une relation, ignorée *a priori*, entre les quatre constantes nécessaires à la détermination du quadrilatère inscrit rend ce problème indéterminé, ou le transforme en question de lieux géométriques pour les quatre sommets, ou pour tout autre point lié au quadrilatère, et que ces mêmes lieux géométriques, di-

rectement cherchés, sont identiques lorsqu'on donne trois de ces constantes sur quatre, quelle que soit celle qu'on laisse de côté.

Les exemples qui suivent feront mieux comprendre ces considérations.

1° Problèmes déterminés.

I. — Données : $a + c$, $d + b$, $\widehat{S}$ et $\widehat{Q}$.

On aura les relations suivantes, n° 17.

$$\frac{4\gamma^2\beta\delta\sqrt{\delta^2+\alpha^2}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2} = a + c \qquad \frac{4\delta^2\alpha\gamma\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2} = d + b,$$

et d'ailleurs : $\dfrac{\delta}{\alpha} = \operatorname{cotg}\dfrac{S}{2} \qquad \dfrac{\gamma}{\beta} = \operatorname{cotg}\dfrac{Q}{2}$

on en déduit :

$$\alpha = (d + b)\sin\frac{Q}{2}\operatorname{tg}\frac{S}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{S-Q}{2}\right)\cos\left(\frac{S+Q}{2}\right)}{\sin S \sin Q},$$

$$\beta = (a + c)\sin\frac{S}{2}\operatorname{tg}\frac{Q}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{S-Q}{2}\right)\cos\left(\frac{S+Q}{2}\right)}{\sin S \sin Q},$$

$$\gamma = (a + c)\sin\frac{S}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{S-Q}{2}\right)\cos\left(\frac{S+Q}{2}\right)}{\sin S \sin Q},$$

$$\delta = (d + b)\sin\frac{Q}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{S-Q}{2}\right)\cos\left(\frac{S+Q}{2}\right)}{\sin S \sin Q}.$$

En laissant de côté le facteur commun à ces expressions, on pourra construire facilement un quadrilatère semblable au proposé, et une application d'homothétie fera le reste.

II. — Données $a + c$, $d + b$, m et n.

On peut ramener ce cas au précédent en prenant pour auxiliaires $\dfrac{S}{2}$ et $\dfrac{Q}{2}$ qui sont liées aux données par les relations :

$$(m + n)^2 - (m + n)^2\left(\cos^2\frac{S}{2} + \cos^2\frac{Q}{2}\right) - 4mn\cos^2\frac{S}{2}\cos^2\frac{Q}{2} = 0$$

$$(a + c)^2\cos^2\frac{S}{2} + (d + b)^2\cos^2\frac{Q}{2} = (m + n)^2$$

d'où l'on tirera $\cos\dfrac{S}{2}$ et $\cos\dfrac{Q}{2}$; en y remplaçant $\cos\dfrac{2S}{2}$ et $\cos\dfrac{2Q}{2}$ par $\dfrac{1+\cos S}{2}$ et $\dfrac{1+\cos Q}{2}$ on aura, au lieu d'équations bi-carrées en $\cos\dfrac{S}{2}$ et $\cos\dfrac{Q}{2}$, des équations du second degré en $\cos S$ et $\cos Q$.

On peut encore résoudre la question de la manière suivante. Des tableaux n° 17 et du n° 18, on tire :

(1) $\dfrac{4\beta\delta\gamma^2\sqrt{\delta^2+\alpha^2}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2} = a + c$ (2) $\dfrac{4\alpha\delta^2\gamma\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2} = d + b.$

(3) $\dfrac{2\delta\gamma\sqrt{\beta^2\alpha^2}(\delta\gamma+\alpha\beta)}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2} = m$ (4) $\dfrac{2\delta\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}(\delta\gamma-\beta\alpha)}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2} = n,$

posons $\dfrac{\beta}{\alpha} = x,\ \dfrac{\gamma}{\alpha} = y,\ \dfrac{\delta}{\alpha} = z,$

et divisons membre à membre les équations (3) et (4) ; (1) et (3) ; (2) et (4) ; on aura :

$$(5)\qquad \frac{x}{zy} = \frac{m-n}{m-n},$$

et en éliminant x des deux suivantes, on obtiendra :

$$(6)\qquad (m-n)y\sqrt{1+z^2} = (a+c)\sqrt{1+\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 y^2z^2}$$

$$(7)\qquad (m+n)\sqrt{1+\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 z^2} = (d+b)\sqrt{1+\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 y^2z^2}$$

de cette dernière on tirera z^2 qui, substitué dans (6), fournira :

$$(d+b)^2(m-n)^2y^4-(m+n)^2\left[(a+c)^2+(d+b)^2-4mn\right]y^2+(a+c)^2(m+n)^2=0$$

et l'équation en z sera :

$$(m-n)^2\left[(m+n)^2-(a+c)^2\right]z^4-(m-n)^2\left[(a+c)^2+(d+b)^2-4mn\right]z^2$$
$$+(m+n)^2\left[(m+n)^2-(d+b)^2\right]=0.$$

Les données doivent nécessairement vérifier les inégalités géométriques

$$m+n > a+c \qquad m+n > d+b.$$

On devra en outre, pour la réalité des racines, poser les inégalités

$$(a+c)^2+(d+b)^2-4mn \geqslant 0$$
$$m\varepsilon^2+4p^2n-4mn(m+n) \geqslant 0$$

dans cette dernière $2p$ représente le périmètre $(a+c)+(d+b)$ et $\varepsilon = (a+c)-(d+b)$.

III. — Données : m, n, f et la droite $\mathrm{OI} = \Delta$ qui joint le centre au point de concours des diagonales

On aura les quatre équations suivantes :

$$(1)\quad \frac{2\delta\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\delta\gamma-\alpha\beta} = m \qquad (2)\quad \frac{2\delta\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\delta\gamma+\alpha\beta} = n$$

$$(3)\quad \frac{2\alpha\beta\gamma\delta\sqrt{\delta^2+\gamma^2}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2} = f \qquad (4)\quad \frac{\delta\gamma(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\delta^2+\gamma^2}}{\delta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2} = \Delta$$

de (1) et (2) on déduit :

$$\frac{\delta\gamma}{\alpha\beta} = \frac{m+n}{m-n} \qquad \text{et} \qquad \alpha^2+\beta^2 = \frac{m^2n^2}{(m+n)^2}$$

ensuite de (3) $\sqrt{\delta^2+\gamma^2} = \dfrac{2mnf}{m^2-n^2}$ et enfin, de (4) $\delta\gamma = \dfrac{m^2n^2f}{2\Delta(m^2-n^2)}$

d'où
$$\alpha\beta = \frac{m^2n^2f}{2\Delta(m+n)^2}$$

on en conclut les couples α, β et γ, δ, savoir :

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{mn}{m+n}\left(\sqrt{1+\frac{f}{\Delta}} \pm \sqrt{1-\frac{f}{\Delta}}\right)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{mn}{m+n}\left(\sqrt{1+\frac{f}{\Delta}} \pm \sqrt{1-\frac{f}{\Delta}}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{mn}{\sqrt{m^2-n^2}}\left(\sqrt{\frac{4f^2}{m^2-n^2}+\frac{f}{\Delta}} \pm \sqrt{\frac{4f^2}{m^2-n^2}-\frac{f}{\Delta}}\right)$$

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{mn}{\sqrt{m^2-n^2}}\left(\sqrt{\frac{4f^2}{m^2-n^2}+\frac{f}{\Delta}} \pm \sqrt{\frac{4f^2}{m^2-n^2}-\frac{f}{\Delta}}\right)$$

2° Problèmes pseudo-déterminés. Equation de condition. Lieux géométriques des sommets ou d'autres points liés au quadrilatère.

On cite un philosophe de l'antiquité dont l'intelligence était si pénétrante qu'il apercevait en un instant toutes les conséquences d'une question posée, en sorte que, pour lui, les distinctions établies ci-dessus eussent été absolument inutiles. Bien que cet état d'esprit soit fort enviable, il n'est nullement nécessaire, les progrès de la solution conduisant au même résultat.

IV. — Données m, n, $\widehat{S}$ et $\widehat{Q}$.

Comme dans l'exemple précédent, les données m et n donnent :

$$(1) \quad \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} = \frac{m+n}{m-n} \quad \text{et} \quad (2) \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{m^2n^2}{(m+n)^2}.$$

D'ailleurs on a

$$(3) \quad \frac{\alpha}{\delta} = \operatorname{tg}\frac{S}{2} \quad \text{et} \quad (4) \quad \frac{\beta}{\gamma} = \operatorname{tg}\frac{Q}{2}.$$

On en conclut :

$$\operatorname{tg}\frac{S}{2} \quad \operatorname{tg}\frac{Q}{2} = \frac{m-n}{m+n}$$

cette relation entre les quatre constantes m, n, $\widehat{S}$ et $\widehat{Q}$ réduit le système d'équations distinctes à trois ; en leur adjoignant les expressions des coordonnées x et y d'un des sommets en fonction de α, β, γ, δ (n° 17). On aura alors cinq équations entre lesquelles on pourra éliminer ces variables et l'on obtiendra l'équation du lieu.

On trouvera de la sorte, pour A (signe inférieur) et C (signe supérieur)

$$\left[(m+n)^2 + (m-n)^2\operatorname{cotg}^2\frac{Q}{2}\right]y^2 \pm 2(m^2-n^2)\left(\operatorname{cotg}\frac{S}{2} + \operatorname{cotg}\frac{Q}{2}\right)xy$$

$$+\left[(m+n)^2+(m-n)^2\operatorname{cotg}^2\frac{S}{2}\right]x^2 - \frac{m^2\left[(m+n)^2-(m-n)^2\operatorname{cotg}\frac{S}{2}\operatorname{cotg}\frac{Q}{2}\right]}{4(m+n)^2} = 0$$

pour B (signe supérieur) et D (signe inférieur)

$$\left[(m+n)^2 + (m-n)^2\operatorname{cotg}^2\frac{Q}{2}\right]y^2 \pm 2(m^2-n^2)\left(\operatorname{cotg}\frac{S}{2} - \operatorname{cotg}\frac{Q}{2}\right)xy$$

$$+\left[(m+n)^2+(m-n)^2\operatorname{cot}^2\frac{S}{2}\right]x^2 - \frac{n^2\left[(m+n)^2+(m-n)^2\operatorname{cotg}\frac{S}{2}\operatorname{cotg}\frac{Q}{2}\right]}{4(m+n)^2} = 0.$$

On voit que les points A, B, C, D décrivent les périmètres de secteurs orthogonaux d'ellipses ayant pour centre commun le point L. Le lieu de O est une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

V. — Données : $\frac{a}{c}$, $\frac{d}{b}$, m et n

comme ci-dessus, on peut écrire de suite :

$$\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} = \frac{m+n}{m-n} \qquad \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{mn}{m+n}$$

et le tableau 17 donne :

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\frac{a}{c}+1}{\frac{a}{c}-1} = M \qquad \frac{\delta}{\beta} = \frac{\frac{d}{b}+1}{\frac{d}{b}-1} = N$$

il en résulte : $\dfrac{m}{n} = \dfrac{\text{MN} + 1}{\text{MN} - 1}$

cette équation donne lieu aux mêmes remarques que dans IV et l'on trouvera pour lieux de A (signe supérieur) et C (signe inférieur)

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{\text{N} \pm 1}{\text{N}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{\text{M} \pm 1}{\text{M}}\right)^2} = \frac{m^2}{4},$$

et, pour les lieux de B (signe supérieur) et D (signe inférieur)

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{\text{N} \pm 1}{\text{N}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{\text{M} \pm 1}{\text{M}}\right)^2} = \frac{n^2}{4}.$$

Le lieu de I a pour équation

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{\text{N}^2 - 1}{\text{N}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{\text{M}^2 - 1}{\text{M}}\right)^2} = \frac{m^2}{4(\text{MN} + 1)^2}.$$

Le lieu du centre de gravité a une équation de même forme.

3° Lieux déterminés.

On donne trois équations distinctes entre α, β, γ, δ et des paramètres indépendants, et l'on y joint les expressions des coordonnées x et y d'un sommet du quadrilatère, ou de tout autre point déterminé de cette figure, fonctions elles-mêmes de α, β, γ, δ et de constantes données. On se trouvera ainsi dans le même cas que dans 2° après la découverte de l'équation de condition. Il est bon d'observer que ce dernier genre de relations mérite spécialement le titre de ce mémoire.

— Nous faisons suivre ces quelques applications, rapidement résolues, de l'énoncé d'autres cas variés qu'on traitera aisément par des équations du second degré ou bi-carrées.

Quand le lieu s'est trouvé trop compliqué, on a supprimé la mention : lieu, à la suite de celle : équation de condition.

La surface S sera distinguée de l'angle $\widehat{\text{S}}$.

Les angles désignés par A'B'C'D' sont ceux d'où l'on voit respectivement les côtés a, b, c, d des deux sommets opposés, et qui sont déterminés par :

$$\text{tg A}' = \frac{\beta(\gamma + \alpha)}{\alpha\gamma - \beta^2}, \quad \text{tg B}' = \frac{\alpha(\delta - \beta)}{\beta\delta + \alpha^2}, \quad \text{tg C}' = \frac{\beta(\gamma - \alpha)}{\alpha\gamma + \beta^2}, \quad \text{tg D}' = \frac{\alpha(\delta + \beta)}{\beta\delta - \alpha^2}.$$

1° Poblèmes déterminés	2° Problèmes pseudo-déterminés	
données	A, D, m, n	(Equation de condition-lieu)
A, D, m et un côté	A, D, m, R	—
A, D, m, f	A, m, n, R	—
A, D, m, S	m, n, μ, f	(Equation de condition)
A, m, n et un côté	A, n, R, f	—
A, m, n, f	b, d, B', D'	—
A, m, n, S		
m, n, S, R	3° Lieux géométriques	
m, n, S, f	A', m, C'	
A, D, f et un côté	m, n, $\hat{\text{I}}$	
A, D, m et un côté	α, β et $\gamma = \delta$ ou $\gamma \times \delta$ ou A, B, C, D, ou A', B', C', D'.	
A, D, R et un côté	α, γ et $\delta = \beta$ ou $\delta \times \beta$	—

A, D, S, b — α, δ et $\beta = \gamma$ ou $\beta \times \gamma$ ou A, B, C, D ou A′, B′, C′, D′.
A, D, f, S — β, γ et $\alpha = \delta$ ou $\alpha \times \delta$ —
A, D, R, f — β, δ et $\alpha = \gamma$ ou $\alpha \times \gamma$ —
A, m, R, f — γ, δ et $\alpha = \beta$ ou $\alpha \times \beta$.

Lieux) Autres *conditions*. On donne :

δ, γ et θ

$\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$ et SQ passant par un point fixe

θ, μ et E_1G_1 parallèle à SQ

E_1G_1 passant par un point fixe ; G_1Q_1 et E_1S parallèles à des droites données.

Autres questions.

— δ et γ étant constants ; α, β variables ; si le lieu du point J_1 est représenté par $\alpha\beta =$ constante ou $\dfrac{\delta - \beta}{\gamma - \alpha} =$ constante, les tangentes en J, et en C aux points correspondants sont parallèles.

— Déduire de l'expression $S = 2f \times LP'$ (en supposant que Q s'écarte à l'infini de A, sur la droite AD par exemple) que l'aire d'un trapèze isoscèle est quadruple de celle du triangle ayant pour sommets les milieux des diagonales et le point de rencontre des côtés non parallèles.

— A déduire du n° 8. Si l'on considère deux hyperboles ayant un foyer commun P ; pour directrices deux droites quelconques AC et BD qui se coupent en I (*fig.* 5) et même paramètre (rapport des distances au foyer et à la directrice) ; les intersections de chacune des directrices par l'autre hyperbole seront quatre points situés sur une même circonférence. Le paramètre a pour expression $\dfrac{R}{f}$.

Ces propriétés subsistent, sous les mêmes conditions, pour deux ellipses ou deux paraboles, et les cordes communes aux deux courbes sont situées sur l'une ou l'autre des bissectrices des angles formés par les directrices.

— Si l'on prolonge les deux côtés d'un angle du quadrilatère, A, par exemple, d'une longueur égale au côté opposé, la diagonale, issue de A, du parallélogramme construit sur les lignes $a + c$ et $d + b$ ainsi formées, passe par le point L. De là un moyen facile pour obtenir ce point.

H. Lecocq
ancien professeur de l'Université (Avignon).

CONDITIONS DE DIVISIBILITÉ
D'UN POLYNÔME ENTIER $f(x)$ PAR $(x - a)^2$ ET $(x - a)^3$
MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **Barbarin**, professeur au lycée de Bordeaux

I. — *Divisibilité par* $(x - a)^2$.

Soient

$$f(x) \equiv A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m$$
$$f_1(x) \equiv B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + \ldots\ldots + B_{m-1}$$

le polynôme proposé et le quotient de sa division par $x - a$; on a identi-

quement, pour toute valeur de x

$$f(x) \equiv (x-a)f_1(x) + f(a).$$

Pour que $f(x)$ soit divisible par $(x-a)^2$, il faut et il suffit que $f(x)$ et $f_1(x)$ soient séparément divisibles par $x-a$, ou que l'on ait à la fois

(1) $$f(a) = 0 \qquad f_1(a) = 0.$$

D'après la règle de la division des polynômes, on a

$$\begin{array}{ll|l|ll} f_1(x) \equiv A_0 x^{m-1} & + A_0 a & x^{m-2} + A_0 a^2 & x^{m-3} + \ldots & + A_0 a^{m-1} \\ & + A_1 & \quad + A_1 a & & + A_1 a^{m-2} \\ & & \quad + A_2 & & + A_{m-1} \end{array}$$

donc, en ajoutant les résultats numériques *ligne par ligne*,

$$f_1(a) = mA_0{}^{m-1}a + (m-1)A_1{}^{m-2}a + (m-2)A_2a^{m-3} + \ldots + 2A_{m-2}a + A^{m-1}.$$

Envisageons le nouveau polynôme

$$f'(x) \equiv mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \ldots + 2A_{m-2}x + A_{m-1}$$

chacun de ses termes peut se déduire du terme du même rang dans $f(x)$ par le procédé mécanique que voici : *Multiplier le coefficient du terme considéré de* f(x) *par l'exposant de* x *que ce terme contient, puis retrancher* 1 *à l'exposant de* x. Appelons ce calcul une *dérivation*, et disons que $f'(x)$ est le *dérivé* de $f(x)$. L'identité des conditions

$$f_1(a) = 0 \qquad f'(a) = 0$$

prouve que $f_1(x)$ et $f'(x)$ sont *en même temps* divisibles par $x-a$; donc le système de conditions (1) équivaut au suivant

(2) $$f(a) = 0 \qquad f'(a) = 0.$$

Pour qu'un polynôme f(x) *soit divisible par* (x — a)², *il faut donc et il suffit que ce polynôme et son dérivé s'annulent ensemble pour* x = a.

II. — *Divisibilité par* $(x-a)^3$.

Pour que $f(x)$ soit divisible par $(x-a)^3$ il faut et il suffit que $f(x)$ soit divisible par $x-a$, et $f_1(x)$ par $(x-a)^2$; de là, en appelant $f_1'(x)$ le polynôme dérivé de $f_1'(x)$ par la règle citée plus haut, le système de conditions

$$f(a) = 0, \qquad f_1(a) = 0, \qquad f_1'(a) = 0,$$

ou, ce qui est identique,

(3) $$f(a) = 0, \qquad f'(a) = 0, \qquad f_1'(a) = 0,$$

or

$$\begin{array}{ll|l|ll} f_1'(x) \equiv (m-1)A_0x^{m-2} & + A_0 a & (m-2)x^{m-3} + A_0a^2 & (m-3)x^{m-4} + \ldots & + A_0a^{m-2} \\ & + A_1 & \qquad + A_1 a & & + A_1 a^{m-3} \\ & & \qquad + A_2 & & + A_2 a^{m-4} \\ & & & & + A^{m-}{}_2 \end{array}$$

en ajoutant les résultats numériques *ligne par ligne*, on a encore

$$f_1'(a) = \frac{m(m-1)}{2} A_0a^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} A_1a^{m-3}$$
$$+ \frac{(m-2)(m-3)}{2} A_2a^{m-4} + \ldots + A_{m-2}$$

car les coefficients numériques qui accompagnent $A_0A_1\ldots$ sont des sommes d'entiers consécutifs. (*A suivre*).

Barbarin,
professeur au Lycée de Bordeaux.

Le Directeur-gérant,
Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

201. Mathématiques. — 1) Dans un triangle ABC la base AB est fixe. On demande le lieu de C tel que

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{cotg} A.$$

2) On donne un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$. On propose de trouver sur ce demi cercle un point M tel que, le projetant sur AB ou P on ait $AP + PM = l$, l étant une quantité donnée.

Charles Ccchez.

202. Epure. — On donne un triangle ABC dans un plan de côte 12 $AC = 0^m,10$, $AB = 0,08$, $BC = 0,012$. Ce triangle est la base d'un tétraèdre dont on connaît l'arête $AS = 0^m,11$, l'arête $SB = 0^m,13$, et la pente $\frac{2}{5}$ du plan de la face SBC. Un cylindre horizontal dont l'axe passe par S a ses génératrices parallèles au côté AC. On demande le solide restant du tétraèdre entaillé par le cylindre.

Léopold Massip.

203. Calcul trigonométrique. — Calculer les angles x compris entre 0 et 18° donnés par la formule

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{a \sin\beta - b\sin\alpha}{a\sin\beta + b\sin\alpha}$$

dans laquelle on fait

$$a = 4627^m,55, \qquad b = 3944,^m68.$$
$$\alpha = 51° 57' 44'',$$
$$\beta = 63° 18' 27''.$$

204. Questions d'oral. — 1) On donne un triangle ABC. Sur le prolongement de BC on donne un point M. Déterminer sur AC un point M tel qu'en menant par ce point la parallèle DE à BC on ait $DE = DM$.

Lire à la quatrième page de la couverture les conditions relatives à la correction et à l'abonnement des copies.

---

2) Construire un triangle rectangle connaissant la bissectrice de l'angle aigu B et la longueur MC, M étant le pied de la bissectrice sur le côté AC (A ou sommet de l'angle droit).

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

205. Mathématiques. — 1) Un cône de hauteur h est inscrit dans une sphère de rayon R, à quelle distance x du sommet du cône faut-il mener un plan parallèle au plan de sa base pour que l'aire de la section faite dans le cône soit le $\frac{1}{3}$ de l'aire de la section faite dans la sphère par le même plan.

2) Si dans un triangle $\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$ le triangle est rectangle ou isocèle.

206. — Calculer par logarithme

$$x = \frac{(a + b)^m + (a - b)^n}{123\ldots\ldots p}$$

quand $a = 2221,43,\quad b = 6635,48,$

$m = 15,\quad n = 11,\quad p = 7.$

207. Physique. — Un prisme BAC dont l'angle réfringent A est connu, est rencontré perpendiculairement à l'une de ses faces par un rayon lumineux RI qui se réfracte en H suivant HS. On mesure la déviation δ que le rayon subit par cette réfraction. Déduire de la connaissance des angles A et δ la valeur de l'indice de réfraction de la substance du prisme.

207 bis. Chimie. — Phosphore et ses questions allotropiques.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES MATHEMATIQUES

208. Mathématiques. — Une pyramide SABCDE a pour base un pentagone régulier dont le côté est a, les autres arêtes de la pyramide sont aussi égales à a. On demande de calculer : 1° le volume de la pyramide, 2° le rayon de la sphère circonscrite, 3° les lignes trigonométriques de l'angle plan du dièdre SA.

(*Au choix*). *a*) Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

b) Tangente à une ellipse par un point extérieur.

c) Démontrer les théorèmes qui conduisent au volume de la sphère.

209. Physique. — Un baromètre est enfermé dans un large tube de verre scellé à la lampe. A l'instant de la fermeture, la hauteur de la colonne est de 76 centimètres et la température de 15°. Calculer la hauteur de la colonne quand la température est de 40°. On ne tiendra pas compte de la dilatation du verre.

(*Au choix*). *a*) Brouillards, nuages, rosée, pluie, neige.

b) Photométrie.

c) Electricité athmosphérique.

IV. — BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

210. Mathématiques. — Une sphère est posée sur un plan horizontal. Sur le même plan repose par sa base, un cône droit dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère. On demande de couper ces deux corps par un plan horizontal de telle sorte que les sections soient entre elles comme deux nombres donnés.

(*Au choix*). *a*) Résolution directe de l'équation du second degré.

b) Etablir la somme, le produit, la différence des racines d'une équation du second degré.

c) Résolution de l'équation bicarrée.

211. Physique. — Un tuyau fermé de $0^m,60$ de longueur donne l'harmonique 3. Quel est le rang de cet harmonique dans l'échelle musicale?

(*Au choix*). *a*) Marche des rayons lumineux dans un miroir concave.

b) Marche des rayons lumineux dans la lampe et grossissement.

c) Expériences de Newton sur la décomposition de la lumière.

V. BACCALAURÉAT (LETTRES. — SCIENCES)

212. Mathématiques. — Etudier les variations de la fonction

$$Y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

(*Au choix*). *a*) Explication des différentes méthodes de nivellement.

b) Ombre d'une sphère.

c) Ombre d'un cône.

213. Physique. — On donne 50 éléments de Daniell dont la force électro-motrice est de 1 volt et la résistance de 1 ohm montés en série. On demande combien on pourra alimenter de lampes à incandescence montées en dérivation, ces lampes étant de 50 volts, ayant une résistance à chaud de 50 ohms et exigeant pour leur fonctionnement un courant de $\frac{1}{2}$ ampère.

(*Au choix*). *a*) Enoncé des lois fondamentales des courants.

b) Bobine de Ruhmkorff.

c) Galvanoplastie. — Dorure. — Argenture.

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

214. — Pour creuser un puits les ouvriers demandent 1 centime pour le premier mètre, 2 centimes pour le deuxième. L'eau étant trouvée à 17 mètres de profondeur. Combien coûte le forage du puits.

215. — Calculer la surface d'un triangle équilatéral de 6 mètres de côte.

216. — Calculer $x = \frac{\sqrt[6]{7777} \times \sqrt[2]{6666} + \sqrt{7890}}{3775 + \sqrt[3]{9684}}$.

217. — Quelle serait la valeur au change d'un objet d'or du poids de 428 gammes et au titre 0,920. Le kilogramme d'or pur vaut au change 3437 francs. La valeur du cuivre faisant partie de l'alliage sera considérée comme nulle.

218. Algèbre. — Quelle valeur faut-il attribuer à p et à Q pour que $x^4 + 1$ soit divisible par $x^2 + px + q$.

218bis. — Même calcul qu'au n° **216**.

DEUXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Manuel d'analyse chimique appliquée à l'examen des produits industriels et commerciaux, par Emile Fleurent, docteur ès-sciences, professeur remplaçant du cours de chimie industrielle au conservatoire national des Arts et métiers. — Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine, Paris. — 1 volume in-8° carré de 582 pages avec 101 figures. — Prix : **12** fr.

En écrivant ce livre, l'auteur a cherché à : 1° Exposer, en les soulageant de tous les détails théoriques et pratiques qui ne sont pas rigoureusement utiles, les méthodes générales d'analyse minérale qualitative et quantitative et l'analyse organique élémentaire ;

2° Eviter des recherches trop longues à ceux qui sont pressés par le temps ou qui n'ont pas pour cela des connaissances suffisantes, en ne donnant, pour l'examen de chaque produit soumis au contrôle chimique, qu'une seule méthode, au plus deux, devant conduire rapidement et sûrement au résultat qu'on envisage ;

3° Réunir dans un même cadre, ainsi qu'on pourra s'en rendre compte en jetant un coup d'œil rapide sur la table des matières, l'étude des produits *les plus importants* en même temps que *les plus divers* qui peuvent se rencontrer dans le laboratoire du chimiste industriel : Produits métalloïdiques et métalliques, engrais minéraux et organiques, produits végétaux et animaux, boissons fermentées, etc., etc.

On trouvera souvent intercalés à la fin de chaque chapitre des tableaux donnant les résultats d'application des méthodes développées dans le texte et empruntés aux tableaux originaux des auteurs.

SOLUTION DE LA QUESTION 161

Par M. **Vazou**

Problème. — *Une suite de sphères* C, C′, C″. .. *en nombre illimité et tangentes extérieurement sont inscrites dans un même cône de révolution dont l'ouverture est* 2ω. *La distance* a *du sommet* S *du cône au centre* C *de la sphère la plus éloignée est connue. On demande : 1° d'exprimer au moyen de* a *et de* ω, *la distance* x *du sommet du cône au centre de gravité de l'ensemble des sphères. On devra trouver en particulier que, pour* $\omega = 30°$, $x = \frac{39}{40}a$; *2° ce que devient* x *pour* $\omega = 0$ *et pour* $\omega = 90°$; *3° de montrer que quand* ω *varie de* 0° *à* 90°, x *va toujours en augmentant.*

Désignons par r le rayon de la sphère C et par r_1, r_2... r_n les rayons des sphères successives supposées au nombre de n. Soient a, x_1, x_2... x_n, les distances des centres de ces sphères au sommet du cône, toutes ces sphères

étant inscrites dans le cône on a

$$(1)\quad \begin{cases} r = a \sin \omega \\ r_1 = x_1 \sin \omega \\ r_2 = x_2 \sin \omega \\ \ldots\ldots \\ r_n = x_n \sin \omega \end{cases}$$

Les sphères étant tangentes entre elles successivement on a

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 + r_1 + r = a \\ x_2 + r_2 + r_1 = x_1 \\ x_3 + r_3 + r_2 = x_2 \\ \ldots\ldots \\ x_n + r_n + r_{n-1} = x_{n-1}. \end{cases}$$

Désignons par x la distance du sommet du cône au centre de gravité de l'ensemble des sphères, en appliquant le théorème des moments par rapport au sommet du cône on a

$$(3)\quad (r^3 + r_1^3 + r_2^3 \ldots + r_n^3) x = ar^3 + x_1 r_1^3 + x_2 r_2^3 + \ldots + x_n r_n^3$$

en remplaçant dans (3) les r par leurs valeurs données par (1) il vient

$$\sin^3\omega (a^3 + x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3) = (a^4 + x_1^4 + \ldots + x_n^4) \sin^3\omega.$$

$$(4)\quad x = \frac{a^4 + x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4}{a^3 + x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3}.$$

Or, en tenant compte des relations (1), les égalités (2) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} x_1(1 + \sin \omega) &= a(1 - \sin \omega) \\ x_2(1 + \sin \omega) &= x_1(1 - \sin \omega) \\ x_3(1 + \sin \omega) &= x_2(1 - \sin \omega) \\ &\ldots\ldots \\ x_n(1 + \sin \omega) &= x_{n-1}(1 - \sin \omega), \end{aligned}$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1}{a} = \dfrac{1 - \sin \omega}{1 + \sin \omega} = u \quad \text{en posant} \quad \dfrac{1 - \sin \omega}{1 + \sin \omega} = u \\ \dfrac{x_2}{x_1} = u \\ \dfrac{x_3}{x_2} = u \\ \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = u \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = au, \quad x_2 = au^2, \quad \ldots\ldots \quad x_n = au^n.$$

Mais u est une quantité plus petite que 1 car ω est toujours plus petit que 90°, le numérateur et le dénominateur de l'expression précédente contiennent donc des progressions géométriques décroissantes de raisons u^4 et u^3, si donc on suppose que n augmente indéfiniment on a

$$x = \frac{\dfrac{1 - u^4}{a}}{\dfrac{1}{1 - u^3}} = \frac{a(1 - u^3)}{1 - u^4} = \frac{a(u^3 - 1)}{u^4 - 1}$$

$$(6)\quad x = \frac{a(u - 1)(u^2 + u + 1)}{(u - 1)(u + 1)(u^2 + 1)} = \frac{a(u^2 + u + 1)}{(u + 1)(u^2 + 1)}.$$

Pour $\omega = 30^o$, comme $\sin \omega = \frac{1}{2}$, on a

$$u = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

par suite

$$(7) \qquad x = \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot 1}{\left(\frac{1}{3} + 1\right)\left(\frac{1}{9} + 1\right)} \cdot a + \frac{\frac{13}{9}}{\frac{4}{3} \times \frac{10}{9}} \cdot a = \frac{39}{40} \cdot a$$

Pour $\omega = 0$, on a $u = 1$, il faut alors nous reporter à l'expression générale de la valeur de x

$$x = \frac{a(1 + u^4 + u^8 + \ldots + u^{4n})}{1 + u^3 + \ldots + u^{3n}} = \frac{a \times (n+1)}{n+1} = a.$$

Pour $\omega = 90^o$, $u = 0$ on retrouve encore $x = a$.

Mais si au lieu de supposer brusquement $\omega = 0$, on suppose que l'on fasse tendre ω vers 0, alors u reste encore plus petit que 1, quoique tendant vers 1 à la limite et l'on peut alors chercher la limite de la valeur de x en cherchant la limite de la valeur (6), on a alors

$$\text{lem}\; x\; \frac{36}{4}.$$

De même si l'on suppose que ω tende vers $90°$ sans jamais l'atteindre, u tend vers 0, la formule (6) donnerait comme limite de x, lem $x = a$.

Mais afin de voir nettement comment varie x quand ω varie de $+ \varepsilon$ à $90 - n$, nous allons faire un changement de variable.

Posons $\omega = 90 - \alpha$, alors on a

$$u = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

quand a varie de 0 à 90°, α varie de 90° à 0, or $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ décroit de 1 à 0 quand α varie de 90° à 0 ou quand ω varie de 0° à 90°, si l'on pose $u = \frac{1}{z}$, z variera de 1 à l'∞.

En faisant ce changement l'expression (6) devient

$$x = \frac{az(z^2 + z + 1)}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{a(z^3 + z^2 + z)}{z^3 + z^2 + z + 1} = a\left(1 - \frac{1}{z^3 + z^2 + z + 1}\right)$$

Sous cette forme, on voit que x augmente quand z varie de 1 à l'infini et pour $z = \infty$, on retrouve bien $x = a$. **M. Vazou.**

SOLUTION DE LA QUESTION 175

Par M. **Vazou**

Projection. — *Un piéton part à 8 heures du matin, il fait 1 kilomètre en 9 minutes et il se repose 3 minutes après chaque kilomètre. A quelle heure sera-t-il rejoint par un courrier qui part dans le même sens à midi, fait 9 kilometres par heure et se repose 20 minutes chaque fois qu'il a parcouru 20 kilomètres.*

Nous allons chercher le nombre de kilomètres parcourus au moment de la première rencontre, c'est-à-dire lorsque le courrier et le piéton se trouvent ensemble pour la première fois.

La première rencontre peut se faire dans l'une des trois hypothèses suivantes :

1° *A la fin d'un repos du piéton;*

2° *Lorsque le piéton est en marche;*

3° *Pendant l'intervalle d'un repos;*

1° *Supposons d'abord que la rencontre ait lieu à la fin d'un repos du piéton*, le nombre de kilomètres parcourus est alors un nombre entier que nous désignerons par x et que l'on peut écrire

$$x = 20y + z \qquad y \text{ entier} > 0$$
$$z \quad - \quad > 0 \text{ et } < 20$$

on peut remarquer en effet que lorsque le courrier se met en marche le piéton a parcouru 20 kilomètres.

En tenant compte des repos, le piéton fait 1 kilomètre en 12 minutes et comme la rencontre se fait à la fin d'un repos, le temps écoulé depuis le départ du piéton est = à $(20y + z) \times 12$.

D'autre part, puisque le courrier fait 9 kilomètres en 60 minutes, pour parcourir 1 kilomètre, il met $\frac{60^m}{9}$ et pour parcourir 20 kilomètres en tenant compte du repos il met

$$\frac{60 \times 20}{9} + 20 = \frac{20 \times 69}{9} = \frac{20 \times 23}{3},$$

et pour parcourir $20y + z$ il mettra

$$\frac{20 \times 23}{3} y + \frac{60}{9} z = \frac{460y}{3} + \frac{20z}{3} = \frac{20(23y + z)}{3}$$

comme il est parti 4 heures = 240 minutes en retard, on aura donc l'équation

$$(20y + z) \times 12 = 240 + \frac{20 \times (23y + z)}{3}$$
$$36(20y + z) = 720 + 20(23y + z)$$
$$20 \times 13y + 16z = 720$$
$$65y + 4z = 180$$

d'où
$$z = \frac{180 - 65y}{4} = 45 - 16y - \frac{y}{4}$$

z devant être entier, il faut nécessairement qu'on ait $\frac{y}{4} = u$,

d'où
$$z = 4u, \qquad y = 45 - 65u.$$

Or, il n'y a aucune valeur de u entière, positive ou négative, qui donne pour y et z des valeurs positives et pour z une valeur inférieure à 20. *La première rencontre ne peut donc avoir lieu à la fin d'un repos.*

2° *La première rencontre a lieu lorsque le piéton est en marche* (ceci comprend le cas particulier où la rencontre aurait lieu au commencement d'un repos).

La distance parcourue par le piéton peut être représentée par

$$x = 20y + z + v \qquad y \text{ entier} > 0$$
$$z \quad - \quad > 0 \text{ et } < 20$$
$$v \text{ fraction de kilomètre} \leqslant 1$$

Ne fais-je pas ici une pétition de principe en supposant ν commensurable? (Je démontre plus loin que ν est commensurable).

Le temps mis par le piéton à parcourir x est donc égal à

$$(20y + z) \times 12 + 9\nu$$

le temps mis par le courrier est égal à

$$\frac{20 \times 23y}{3} + \frac{60(z + \nu)}{9} = \frac{20(23y + z + \nu)}{3}$$

nous aurons l'équation

$$(20y + z) \times 12 + 9\nu = 240 + \frac{20(23y + z + \nu)}{3}$$

$$36(20y + z) + 27\nu = 720 + 20(23y + z + \nu)$$

$$20 \times 13y + 16z + 7\nu = 720.$$

Cette équation exige que 7ν soit entier, donc ν est commensurable.

Posons $7\nu = \gamma$, nous aurons

$$65y + 4z = 180 - \frac{\gamma}{4} = 180 - \delta.$$

$\frac{\gamma}{4}$ ne peut prendre que les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 puisque $\nu < 1$ par suite $\delta = \frac{\gamma}{4}$ qui doit être entier ne peut prendre que la valeur 1 correspond à $\gamma = 4$ et $\nu = \frac{4}{7}$. L'équation devient

$$65y + 4z = 179$$

$$z = \frac{179 - 65y}{4} = 45 - 16y - \frac{y + 1}{4},$$

z devant être entier, il faut nécessairement que $\frac{y + 1}{4} = u$,

par suite
$$y = 4u - 1$$
$$z = 61 - 65u.$$

Or, il n'existe aucune valeur entière de u, positive ou négative qui donne pour y et z des valeurs entières positives et pour z une valeur inférieure à 20. *La première rencontre ne peut donc avoir lieu lorsque le piéton est en marche.*

3° *La rencontre a lieu dans un intervalle de repos du piéton.*

Le piéton a alors parcouru un nombre entier de kilomètres

$$x = 20y + z - 1 + 1$$

l'intervalle de temps écoulé depuis le départ du piéton est égal à

$$(20y + z - 1)12 + 9 + \theta \qquad \theta < 3 \text{ minutes}$$

Temps mis par le courrier $= \frac{20(23y + z)}{3}$

on aura l'équation

$$(20y + z - 1) \times 12 + 9 + \theta = \frac{20(23y + z)}{3} + 240$$

$$36(20y + z - 1) + 27 + 3\theta = 20(23y + z) + 720$$

$$20 \times 13y + 16z - 9 + 3\theta = 720,$$

de cette équation on déduit que 3θ doit être entier, donc θ est commensurable.

Posons $3\theta = \gamma \qquad \gamma < 9$

$$4(65y + 4z) = 729 - \gamma$$

$$65y + 4z = 182 + \frac{1 - \gamma}{4}$$

$$\frac{1 - \gamma}{4} = \delta \text{ doit être entier } \gamma = 1 - 4\delta.$$

γ doit être entier, > 0 et < 9, il n'y a que les valeurs $\delta = 0$ et $\delta = -1$ qui donnent par γ des valeurs convenables

$$\delta = 0, \qquad \gamma = 1, \quad \theta = \frac{1}{3},$$

$$\delta = -1, \quad \gamma = 5, \quad \theta = \frac{5}{3},$$

Pour $\gamma = 1$, on a $\qquad 65y + 4z = 182$

$$z = \frac{182 - 65y}{4} = 45 - 16y + \frac{2 - y}{4}.$$

Posons $\qquad \frac{2 - y}{4} = u,$

d'où $\qquad y = 2 - 4u = 2(1 - 2u)$

$$z = 45 - 32(1 - 2u) + u = 13 + 65u.$$

Il n'y a que la valeur $u = 0$ qui convienne et qui donne

$$y = 2, \quad z = 13$$

par suite $\qquad x = 40 + 13 = \mathbf{53}$ **kilomètres.**

Pour $\gamma = 5$ on a

$$65y + 4z = 181$$

$$z = \frac{181 - 65y}{4} = 45 - 16y + \frac{1 - y}{4}.$$

Posons $\qquad \frac{1 - y}{4} = u$

d'où $\qquad y = 1 - 4u, \quad z = 29 + 65u.$

Aucune valeur de u ne donne pour y et z des valeurs convenables.

Ainsi donc la première rencontre a lieu lorsque le courrier a parcouru 53 kilomètres, par conséquent le piéton a parcouru à partir de midi 33 kilomètres.

Temps mis par le courrier pour atteindre le piéton

$$\frac{20 \times (46 + 13)}{3} = \frac{20 \times 59}{3} = \frac{1180}{3} = 393^{m} + \frac{1}{3} = 6^{h},33^{m}\frac{1^{m}}{3} = 6^{h},33^{m},20^{s}.$$

Telle est l'heure de la première rencontre.

Le courrier continue son chemin et a encore 7 kilomètres à faire avant de s'arrêter. Pour parcourir ces 7 kilomètres il mettra un temps égal à

$$\frac{7}{9} \text{ d'heure} = \frac{7 \times 60^{m}}{3} = \frac{7 \times 20}{3} = \frac{140}{9} = 46^{m} + \frac{2^{m}}{3} = 46^{m},40^{s};$$

il se repose 20 minutes, par conséquent se remet en marche $66^{m},40^{s} = 1^{h},6^{m},40^{s}$ après avoir rencontré pour la première fois le piéton.

Cherchons l'espace parcouru par le piéton pendant cet intervalle de temps. Tout d'abord le piéton ne s'est pas remis en route au moment même où il était atteint par le courrier. Comme $\theta = \frac{1^{m}}{3}$, il est reparti $2^{m}\,\frac{2}{3}$ après la rencontre, par conséquent il faut déterminer l'espace parcouru par le piéton

pendant un temps égal à

$$66^{m} + \frac{2}{3} - \left(2 + \frac{2}{3}\right) = 64 \text{ mètres,}$$

il a donc parcouru $5^{k} + \frac{4}{9}$ de kilomètre, la distance qui le sépare du courrier au moment du départ de celui-ci est donc égale à

$$7^{k} - \left(5 + \frac{4}{5}\right) = 2 - \frac{4}{9} = \frac{14}{9} = 1^{k} + \frac{5}{9}.$$

Lorsque le courrier a parcouru 20 kilomètres et qu'il va partir de nouveau le temps écoulé est égal à

$$\frac{60 \times 20}{9} + 20 = \frac{400}{3} + 20^{m} = 133 + \frac{1}{2} + 20 = 153^{m} + \frac{1}{3}.$$

Cherchons l'espace parcouru par le piéton pendant ce temps. Tout d'abord il achève de parcourir sa fraction $\frac{5}{9}$ de kilomètre en 5 minutes, puis il se repose 3 minutes, par suite il nous reste à déterminer l'espace parcouru en $153 + \frac{1}{3} - 8^{m} = 145^{m} + \frac{1}{3} = 2^{h}\,24^{m} + 1^{m} + \frac{1}{3}$.

Cet espace est égal à $10^{k} + 2^{k} + \left(\frac{1}{9} \times \frac{4}{3}\right) = 12^{k} + \frac{4}{27}$.

il a donc parcouru en tout $12^{k} + \frac{4}{27} + \frac{5}{9} = 12^{k} + \frac{19}{27}$,

la distance qui sépare le piéton du courrier au moment du départ de celui-ci est donc égale à $20 - \left(12 + \frac{19}{27}\right) = 8 - \frac{19}{27} = 7 + \frac{8}{27}$.

la distance qui le sépare du courrier au moment où celui-ci va repartir a donc augmenté de $7 + \frac{8}{27} - \left(1 + \frac{5}{9}\right) = 6 - \frac{7}{27} = 5^{k} + \frac{20}{27}$.

Cette augmentation de distance se reproduit à chaque nouveau départ du courrier, *par conséquent le piéton ne rejoindra jamais le courrier.*

M. Vazou.

TROISIÈME PARTIE

CONDITIONS DE DIVISIBILITÉ

D'UN POLYNÔME ENTIER $f(x)$ PAR $(x - a)^2$ ET $(x - a)^3$

MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **Barbarin**, professeur au lycée de Bordeaux

(*Suite*, voir nº de Mars, p. 103)

Envisageons cette fois le polynôme

$$f''(x) \equiv m(m-1)A_0 x^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1 x^{m-3} + \dots + 2A_{m-2}$$

la règle de dérivation le tire de $f'(x)$: c'est donc le *dérivé du dérivé* de $f(x)$ ou *le deuxième dérivé* de $f(x)$. Par suite

$$f_1'(a) = 0 \quad f''(a) = 0,$$

sont des conditions identiques exprimant que $f_1'(x)$ et $f'(x)$ sont ensemble

divisibles par $x - a$, et le système (3) équivaut au suivant

(4) $$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0.$$

Pour qu'un polynôme f(x) *soit divisible par* $(x - a)^3$, *il faut donc et il suffit que ce polynôme, son premier dérivé* f'(x), *et son second dérivé* f''(x) *s'annulent ensemble pour* x = a.

Exemple. — Prouver que :

$f(x) \equiv x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$ est divisible par $(x - 1)^3$ (*Catalan*)

$$f'(x) \equiv (2n+1)x^{2n} - (2n+1)(n+1)x^n + (2n+1)nx^{n-1}$$
$$\equiv (2n+1)x^{n-1}\left[x^{n+1} - (n+1)x + n\right]$$
$$f''(x) \equiv (2n+1)2nx^{2n-1} - (2n+1)(n+1)nx^{n-1} + (2n+1)n(n-1)x^{n-2}$$
$$\equiv (2n+1)nx^{n-2}\left[2x^{n+1} - (n+1)x + n - 1\right]$$

on voit immédiatement que

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = 0$$

la proposition est donc démontrée.

Extrait d'une correspondance

PROPRIÉTÉS DES PUISSANCES CONSÉCUTIVES DES NOMBRES

Voici, Monsieur, quelques observations personnelles que je viens vous soumettre, elles ont trait aux puissances consécutives des nombres.

Il y a déjà cinq ou six ans j'avais composé une table des carrés de 1 à 1000 après avoir fait cette remarque, qui, ainsi que je m'en rendis compte par la suite, n'était pas nouvelle, que le carré de deux nombres consécutifs égale le carré du premier nombre, augmenté de la différence entre le carré de ce nombre et son carré précédent, le tout augmenté de deux.

Plus tard, j'en déduisis qu'il devait y avoir une propriété semblable pour les cubes, je finis par trouver, après d'assez longues recherches, le rapport existant ; et enfin, dernièrement, je concluais que toutes les puissances consécutives devaient avoir des propriétés similaires. Or, voici les résultats que j'ai obtenus.

1. *Toutes les puissances des nombres consécutifs sont dans un rapport constant.*

2. *Ce rapport constant se trouve, étant donné une puissance* u, *à la* u^e^ DIFFÉRENCE ENTRE LES PUISSANCES CONSÉCUTIVES, *et il est égal au* PRODUIT DE TOUS LES NOMBRES DEPUIS 1 JUSQU'A u. *Il est toujours invariable pour une même puissance quels que soient les nombres sur lesquels on opère,* pourvu, bien entendu, que ce soit toujours des nombres consécutifs.

3. *On voit donc que ce rapport se complique d'une manière constante au fur et à mesure que l'on opère sur des exposants plus élevés, et pour une puissance quelconque, on pourra prévoir le nombre constant et le rang différentiel où il se trouvera sans avoir besoin de le chercher en faisant toutes les différences.*

4. *Les puissances des nombres consécutifs ont à la* 2e DIFFÉRENCE DES NOMBRES DIVISIBLES PAR TOUS LES NOMBRES PREMIERS DEPUIS 1 JUSQU'À L'EXPOSANT DE LA PUISSANCE.

5. *Les derniers chiffres qui terminent les puissances d'un même nombre sont les mêmes à* 4 *puissances d'intervalle et ne diffèrent que pour les* 10 *premiers chiffres et les* 4 *premières puissances.*

TABLEAU DES 10 PREMIÈRES PUISSANCES DES NOMBRES DE 1 A 10

1	2	3	4	5
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	248
4	16	64	256	1 024
5	25	125	625	3 125
6	36	216	1 296	7 776
7	49	343	2 401	16 807
8	64	512	4 496	32 768
9	81	729	6 561	59 049
10	100	1 000	10 000	100 000
1 E	2 E	6 E	24 E	120 E

6	7	8	9	10
1	1	1	1	1
64	128	256	512	1 024
729	2 187	6 561	19 683	59 049
4 096	16 384	65 536	262 144	1 048 576
15 625	78 125	390 625	1 953 125	9 765 625
46 650	279 936	1 679 616	10 077 696	60 466 176
117 649	823 543	5 724 801	40 353 607	282 475 249
262 144	2 097 152	16 777 216	134 217 728	1 073 741 824
531 441	4 782 969	43 056 721	387 420 489	3 486 784 401
1 000 000	10 000 000	100 000 000	1 000 000 000	10 000 000 000
720 E	5 040 E	40 320	362 880	3 628 800

N. B. — J'ai fait suivre d'un E les puissances sur lesquelles j'ai vérifié toutes les propriétés ci-dessus énoncées.

Exemple. — Pour la 5e puissance, je dis que le nombre constant sera

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120,$$

qu'il se trouvera à la 5e différence, de plus que les chiffres qui vont terminer les puissances des nombres seront ceux qui terminent la 1re puissance ($5 - 4 = 1$), c'est-à-dire 1, 2, 3, 4..... 0.

De plus, à partir des 2e différences, nous trouverons des nombres divisibles par $1 \times 2 \times 3 \times 5$, soit, par 30

Premières Puissances	Cinquièmes Puissances	Premières différences	Deuxièmes différences	Troisièmes différences	Quatrièmes différences	Cinquièmes différences
1	1					
2	32	31	180			
3	243	211	570	390	360	
4	1 024	781	1 320	750	480	120
5	3 125	2 101	2 550	1 230	600	120
6	7 776	4 651	4 380	1 830	720	120
7	16 807	9 031	6 930	2 550	840	120
8	32 768	15 960	10 320	3 390	960	120
9	59 049	26 281	14 670	4 350		
10	100 000	40 951				NOMBRE CONSTANT
terminaison des derniers chiffres			divisibilité par 1, 2, 3 et 5			

Voici ce que je voulais faire connaitre, vous voyez, Monsieur, que c'est peu de chose en réalité, mais si cela peut être utile à quelqu'un, j'en serai très content.

Henri Tricoire.

QUESTION 709

Solution, par M. **Ernest Foucart.**

On donne un triangle rectangle AOB; *on projette le sommet* O *sur l'hypoténuse* AB *en* C; *puis,* C *sur* OA, *en* O'. *La parallèle menée par* O', *à* AB, *et la parallèle à* OB, *tracée par le milieu de* OO', *se coupent en un certain point* R; OR *rencontre* AB *en* S.

Démontrer que la perpendiculaire élevée en R *à* OR *et la parallèle à* OA, *menée par* S, *se coupent sur* OB. **(G. L.)**

Le point R est évidemment le milieu de la parallèle à AB limitée à OA et OB; donc S est milieu de AB. La distance SS_1 de S à OB est alors $\frac{AO}{2}$. Soit $OB = a$ $\widehat{ABO} = \alpha$.

Un calcul immédiat donne

$$SS_1 = \frac{OA}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha, \quad SR = \frac{a \sin^2\alpha}{2 \cos \alpha}, \quad SO = \frac{a}{2 \cos \alpha}.$$

Donc $SR.SO = \overline{SS_1}^2$, ce qui montre que la perpendiculaire menée de S_1 à OR passe en R. C.Q.F.D.

Solution exacte de MM. **A. Droz-Farny, Rebeix, L'huillier.**

QUESTION 710

On considère une circonférence Δ, *un diamètre* AB, *et un point* M *sur* Δ. *Soit* H *la projection de* M *sur* AB; *projetons* H *en* K, *sur* AM. *La perpendiculaire élevée à* KH, *en son milieu, rencontre en* T *la tangente en* Δ, *au point* M. *On trace* TK *et, en* K, *on lui élève une perpendiculaire qui coupe* AB *en un certain point* N.

Démontrer que NH *est le quart de* AH. **(G. L.)**

Solution, par M. **A. Droz-Farny**

La perpendiculaire élevée en C sur KH en son point milieu rencontre MB en D, et MH en I. Comme angle TMB = BMH = A le triangle TMI est isoscèle et $MT = MI = \frac{MH}{2}$.

TK rencontre MB et MH respectivement en F et F; les triangles MDT et MKH étant semblables on a : $DT = \frac{KM}{2}$ et, par suite de la similitude des triangles TDE et KEM, $DE = \frac{ME}{2}$. E est donc le centre de gravité du triangle MTI et, par conséquent, MF = FI; donc $MF = \frac{MH}{4}$.

Or, les triangles MKH et HKA sont semblables et comme angle MKF = HKN les droites KF et KN son homologues, donc $NH = \frac{AH}{4}$.

A. Droz-Farny.

Solution exacte **H. L'huillier.**

QUESTION 713

Soit donné un triangle dont les côtés sont a, b, c; *si* m_1, m_2, m_3 *sont les médianes* b_1, b_2, b_3, *les segments non consécutifs déterminés sur les côtés par les bissectrices et* s_1, s_2, s_3 *les symédianes du triangle, on a* :

$$\frac{2m_1b_1}{s_1} \cdot \frac{2m_2b_2}{s_2} \cdot \frac{2m_3b_3}{s_3} = \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(a^2+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Georges F. d'Avillez.

Solution, par **A. Droz-Farny**

Supposons dans le triangle ABC, la droite $AM = m_1$ prolongée jusqu'en D où elle rencontre la circonférence circonscrite et soit $AE = s_1$; les triangles ABD et AEC sont semblables; donc $c : m_1 + MD = s_1 : b$. Or,

$m_1 + MD = m_1 + \frac{a^2}{4m_1} = \frac{4m_1^2 + a^2}{4m_1} = \frac{b^2+c^2}{2m_1}$ (et par conséquent : (1) $\frac{2m_1}{s_1} = \frac{b^2+c^2}{bc}$.

On sait en outre que b_1 segment adjacent au côté c sur BC a pour valeur $b_1 = \frac{ac}{b+c}$, de même $b_2 = \frac{ab}{a+b}$ et $c_2 = \frac{bc}{a+c}$.

Il en résulte : $\frac{2m_1b_1}{s_1} \cdot \frac{2m_2b_2}{s_2} \cdot \frac{2m_3b_3}{s_3} = \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

Remarque. — Si b_1, b_2, b_3 représentent les longueurs des bissectrices R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle on trouve :

$$\frac{m_1b_1}{s_1} \cdot \frac{m_2b_2}{s_2} \cdot \frac{m_3b_3}{s_3} = \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \frac{p}{4R}.$$

A. D. F.

Solution de MM. **Angel Bozal Obejen** à Madrid, **L'huillier, Plakhowo.**

SOLUTION DE LA QUESTION 714

Si trois nombres positifs x, y, z, *sont tels que*

$$x + y + z = 1,$$

démontrer que

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x^3 + y^3 + z^3) > 6xyz.$$

L'inégalité (1) peut s'écrire

$$1 - 2xy - 2xy - 2yz - 1 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3xz^2 + 3y^2z$$
$$3yz^2 + 6xyz > 6xyz,$$

ou $3xy(x+y) + 3xz(x+z) + 3yz(y+z) - 2xy - 2xz - 2yz > 0$,
ou encore, en considérant que $x + y + z = 1$,

$$3xy(1-z) + 3xz(1-y) + 3yz(1-x) - 2xy - 2xz - 2yz > 0,$$

c'est-à-dire

$$xy + xz + yz - 2xyz > 0,$$

inégalité qui nous donne la relation

(2) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 2.$$

Cette dernière inégalité est donc équivalente à (1). Si nous remplaçons les numérateurs par leur valeur $(x + y + z)$, il vient :

$$\frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z} > 2,$$

ou $$\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+x}{z} > 6,$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z} > 6,$$

ou $$\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{y}\right) > 6.$$

Or, chacune des expressions entre parenthèses est supérieure ou égale à 2. En effet, supposons $x > y$. Soit $y = x - r$. (*A suivre*).

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTERAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

219. Mathématiques. — Construire un triangle connaissant l'angle A, la somme $b + c = l$ des côtés AB et AC et la hauteur $BH = \frac{l}{b}$ abaissée de B sur AC.

Vazou.

Résoudre un triangle connaissant l'angle A, la somme $b + c = l$ des côtés AB et AC et la hauteur $AH = h$ abaissée de A sur BC.

Vazou.

Lieu des points tels que leurs polaires par rapport à deux cercles fixes soient rectangulaires. — Discussion. **Massip.**

220. Epure. — Un parallélogramme ABCD situé dans le plan horizontal est défini par les médianes $Am = 0{,}12$, $Bn = 0{,}15$, $CP = 0{,}08$ du triangle ABC, placer A à 0,11 du bord gauche de la feuille et Am suivant la parallèle aux grands côtés de la feuille et au milieu. Un prisme de base ABCD a ses arêtes inclinées à 45° sur le plan H. Sur l'arête issue de A se trouve un point projeté en t tel que $At = 20$ centimètres. Une sphère de rayon 0,08 est tangente en ce point à l'arête AT.

Intersection du prisme et de la sphère en limitant le prisme au plan tangent horizontal à la partie supérieure de la sphère.

Massip.

221. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle

$a = 8457{,}27, \quad b = 5967{,}55, \quad c = 131°47'35''.$

222. Questions d'oral. — Construire un tétraèdre connaissant la base ABC et les angles ASB, ASC et la hauteur du tétraèdre.

Construire $\sqrt{y} = \sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}$.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône de hauteur h, connaissant son volume V égal à celui d'un cône de rayon a et de

hauteur h et sa surface totale égale à la surface d'un cercle de rayon m. **Vazou.**

Calculer les côtés d'un triangle connaissant les rayons r, r' et la bissectrice α. Construction géométrique. **Vazou.**

Calculer les côtés b et c d'un triangle connaissant a, r'', r'''. Construction géométrique. **Vazou.**

224. — Calculer par logarithme x donné par la formule

$$x = \frac{\sqrt[5]{a} \times \pi + 2\pi}{(1+a)\sqrt[5]{2a}} \text{ pour } a = 1845.$$

225. Physique et Chimie. — Un cône droit en fer dont l'axe est vertical et l'angle au sommet 35° flotte sur du mercure dans lequel il s'enfonce de 50 millimètres. Calculer sa hauteur (densité du fer 7,8, du mercure 13,6). On verse ensuite sur le mercure un deuxième liquide, de manière à recouvrir le cône. Il ne s'enfonce plus dans le mercure que de 49 millimètres. Calculer la densité du second liquide.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

226. Mathématiques. — *a*) Coupez un cône par un plan tel que la section hyperbolique ait une surface maximum.

(*Au choix*) *a*). Etablir $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$,

b) démontrer les relations $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

c) établir la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

227. Physique. — Un projectile est lancé de bas en haut avec une vitesse de 300 mètres par seconde. On demande : 1° à quelle hauteur il s'élèvera ; 2° au bout de combien de temps reviendra-t-il à son point de départ $g = 9^m,81$.

(*Au choix*) *a*). — Vapeurs saturantes et non saturantes.

b) Loi de Mariotte.

c) Fusion et surfusion.

IV. — BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT MODERNE

228. Mathématiques. — Calculer la somme des carrés des racines de l'équation

$$x^2 - (3a + b)x + 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0.$$

(*Au choix*). — *a*) Différentes constructions de la tangente extérieure à deux cercles.

b) Cas de similitude des triangles.

c) Propriété de la bissectrice intérieure et extérieure d'un angle d'un triangle.

229. Physique. — Dans un récipient contenant de l'air sec à la pression 755 millimètres, on fait le vide jusqu'à la pression x, on ouvre le robinet et on fait entrer de l'hydrogène jusqu'à ce que le mélange ait de nouveau la pression 755, on fait de nouveau le vide et on fait arriver l'hydrogène jusqu'à la pression 755 millimètres. Quelle doit être la valeur de x pour que le poids de l'hydrogène soit $^1/_{10}$ du poids de l'air avec lequel il était mélangé.

(*Au choix*). — *a*) Photométrie et principaux photomètres.

b) Expériences de Newton sur la lumière.

c) Phénomènes de chaleur rayonnante.

V. BACCALAURÉAT (LETTRES — SCIENCES)

230. — Etudier par la méthode des dérivées les variations de la fonction

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

(*Au choix*). — *a*) Etablir les formules

$$\operatorname{tg}(a + b) \text{ et } \operatorname{tg}(a - b).$$

b) Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ connaissant $\operatorname{tg} a$.

c) Résoudre $a \sin x + b \cos x = c$.

231. Physique. — Dans une pompe aspirante la longueur du corps de pompe est de 1 mètre. Sa section 5*dc* et celle du tube d'aspiration $^1/_{12}$ de celle du corps de pompe. Calculer la

longueur que doit avoir le tube d'aspiration pour que le premier coup de piston amène l'eau au bas du corps de pompe.

(*Au choix*). — *a*) Lois du mélange des gaz.

b) Lois de la dissolution.

c) Lois de la fusion, parler de la surfusion.

VI. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

232. — Pour la nourriture du bétail 100 kilogrammes de bon foin équivalent à 250 kilogrammes de pommes de terre crues ; 300 kilogrammes de ces dernières à 110 kilogrammes de luzerne ; 90 kilogrammes de luzerne à 400 kilogrammes de betteraves ; 300 kilogrammes de betteraves à 105 kilogrammes de seigle. Quelle quantité de foin équivaut à 1200 kilogrammes de seigle?

233. — Calculer $x = \dfrac{\sqrt[7]{9998} \times \sqrt[7]{5680} + \sqrt{2530}}{\pi}$.

VII. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

234. — Un homme occupé aux travaux des champs n'a pas besoin de plus de $1^l,80$ par jour de vin contenant 8° degré d'alcool par litre. D'après cela, quelle dépense inutile fait un homme qui consomme deux litres de vin à 12° d'alcool et lui revenant à 48 francs l'hectolitre.

235. — Vérifier l'identité :

$$(a^2 + b^2 + ab)^2 = a^2(a + b)^2 + b^2(a + b)^2 + a^2b^2.$$

235 bis. — Calculer $x = \dfrac{\pi^2}{3\sqrt{\pi} + 4\sqrt[5]{2375}}$.

DEUXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

G. Lazzeri et A. Basseni. *Élementi di Geometria. Livorno Giusti.* Prix : 5 Lires.

Le plan adopté dans cette géométrie a déjà été inauguré chez nous par quelques auteurs, notamment en géométrie analytique. Il consiste à rap-

procher les parties correspondantes de géométrie plane et de géométrie dans l'espace. Ce plan est contraire aux programmes officiels italiens ; mais il n'est pas toujours nécessaire d'obéir aux programmes et le succès du livre que nous signalons le montre clairement.

Nous regrettons toutefois que la seconde édition de cet ouvrage ne donne pas, comme la première, le volume et la surface du tore, la théorie des centres et des axes. Quoiqu'il en soit, nous le signalons à l'attention de nos collègues qui veulent savoir quelles idées président à l'enseignement des mathématiques hors de nos frontières. **G. M.**

Lieu géométrique des points tels que le rapport de leurs tangentes à deux cercles donnés soit constant. Vérifier que ce lieu est une circonférence ; déterminer la position du centre et la grandeur du rayon.

Soient A et B les centres des deux cercles de rayons R et R', et I le milieu de AB : cherchons sur la ligne des centres un point H tel que en menant les tangentes HD, HE, on ait :

$$\frac{\text{HD}}{\text{HE}} = \frac{m}{n},$$

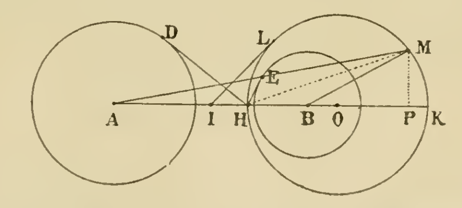
et posons HI $= x$. Le point H sera déterminé par l'équation :

(1) $$\frac{\overline{d + x}^2 - \text{R}^2}{\overline{d - x}^2 - \text{R}'^2} = \frac{m^2}{n^2},$$

qui, étant du second degré, convient à un second point K.

L'équation devient :

$$x^2 - 2d\left(\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}\right)x + d^2 + \frac{n^2\text{R}^2 - m^2\text{R}'^2}{m^2 - n^2} = 0.$$



Soit O le milieu de HK, on a, par la demi-somme des racines :

(2) $$\text{OI} = \alpha = d\left(\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}\right),$$

d'où $$\frac{\alpha + d}{\alpha - d} = \frac{\text{OA}}{\text{OB}}\frac{m^2}{n^2},$$

ce qui permet de déterminer la position du point O.

Décrivons sur HK comme diamètre une circonférence, et posons HK $= 2\rho$.

De la différence des racines de l'équation, on déduit :

$$\rho^2 = \alpha^2 - d^2 + \frac{n^2\text{R}^2 - m^2\text{R}'}{m^2 - n^2} = \text{OA}.\text{OB} + \frac{\text{OA}.\text{R}'^2 - \text{OB}.\text{R}^2}{\text{AB}}.$$

Actuellement, il est facile de démontrer que la circonférence HMK est le lieu cherché. En effet, soit M un point quelconque ; tirons MA, MB et abaissons la perpendiculaire MP sur AB.

Appelons T et T′ les tangentes menées de M aux cercles R et R′, on aura :

$$T^2 = \overline{AM}^2 - R = \overline{AH}^2 \times \overline{MH}^2 + 2AH.HP - R^2$$
$$= (d + \alpha - \rho)^2 + 2\rho HP + 2\rho(d + \alpha - \rho)HP - R^2$$
$$= (d + \alpha)^2 + \rho^2 - 2\rho(d + \alpha) + 2(d + \alpha)HP - R^2$$

ou

(3) $$T^2 = \overline{OA}^2 + \rho^2 - 2\rho OA + 2OA.HP - R^2$$

et de même

$$T'^2 = \overline{BM}^2 - R'^2 = \overline{BH}^2 + \overline{MH}^2 - 2BH.HP - R'^2$$
$$= (\rho - \alpha + d)^2 + 2\rho H.P - 2\rho(\rho - \alpha + d)HP - R'^2$$
$$= (d - \alpha)^2 + \rho^2 - 2(\alpha - \alpha)\rho + 2(\alpha - d)HP - R'^2$$

ou

(4) $$T'^2 = \overline{OB}^2 + \rho^2 - 2\rho GB + 2OB.HP - R'^2$$

de (3) et (4) on conclut :

$$\frac{n^2T^2}{m^2T'^2} = \frac{\overline{OA}^2.OB + OB.\rho^2 - 2\rho.OA.OB + 2OA.OB.HP - R^2.OB}{\overline{OB}^2.OA + OA.\rho^2 - 2\rho OA.OB + 2OA.OB.HP - R'^2OA}$$

et, par suite, en vertu de l'expression trouvée pour ρ^2

$$n^2T^2 = m^2T'^2 \text{ ou } \frac{T}{T'} = \frac{m}{n}.$$

Ce lieu servira à la résolution du problème suivant :

Trouver un point tel que les tangentes menées de ce point à trois circonférences données soient proportionnelles à trois lignes données m, n, p.

La relation (2) appliquée à chacun des trois côtés du triangle ABC obtenu en joignant les centres A, B, C fournira trois points O, O′ O″ en ligne droite, et les rayons ρ' et ρ'' seront donnés par :

$$\rho'^2 = O'C.O'B + \frac{O'B.R''^2 - O'C.R'^2}{BC},$$

$$\rho''^2 = O''C.O''A + \frac{O''A.R''^2 - O''C.R^2}{AC}.$$

H. Lecocq.

I. — *Déterminer, dans le plan d'un triangle* ABC, *un point* O *tel que les angles* OAB, OBC *et* OCA *soient égaux et calculer leur expression commune* (*fig.* 1).

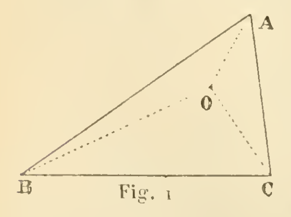


Fig. 1

On voit de suite que les angles COA, AOB et BOC sont respectivement égaux à $2^d - A$, $2^d - B$ et $2^d - C$, en sorte que le point O est déterminé par les trois axes décrits sur les côtés CA, AB, BC et capables des angles $2^d - A$, $2^d - B$ et $2^d - C$.

Il y a un second point O′ pour lequel les angles O′AC, O′AB et O′CB sont égaux, et ce point est à la rencontre des segments décrits sur CA, AB, BC et capables des angles $2^d - C$, $2^d - A$ et $2^d - B$.

Soit OAB $= x$ et $\operatorname{tg} x = u$, on aura

$$\frac{OA}{\sin(B-x)} = \frac{OB}{\sin x}, \quad \frac{OB}{\sin(C-x)} = \frac{OC}{\sin x}, \quad \frac{OC}{\sin(A-x)} = \frac{OA}{\sin x}$$

d'où $\qquad \sin^3 x = \sin(A-x)\sin(B-x)\sin(C-x),$

et $\qquad u^3 = (\sin A - u\cos A)(\sin B - u\cos B)(\sin C - u\cos C)$

et, par suite :

(1) $(1+\cos A\cos B\cos C)u^3 - (\cos B\cos C\sin A + \cos A\cos C\sin B + \cos A\cos B\sin C)u^2$
$+ (\sin B\sin C\cos A + \sin A\sin C\cos B + \sin A\sin B\cos C)u - \sin A\sin B\sin C = 0,$

or $A + B + C = 2^d$ d'où $\sin(A+B+C) = 0$ et $\cos(A+B+C) = -1$,

en développant ces deux dernières égalités, on trouve :

$1 + \cos A\cos B\cos C = \sin B\sin C\cos A + \sin A\sin C\cos B + \sin A + \sin B\cos C$

$\sin A\sin B\sin C = \cos B\cos C\sin A + \cos A\cos C\sin B + \cos A\cos B\sin C,$

et l'équation (1) peut s'écrire :

$$(u^2+1)[(1-\cos A\cos B\cos C)u - \sin A\sin B\sin C] = 0$$

qui a deux racines imaginaires $u = \pm i$ et une réelle :

$$u = \frac{\sin A\sin B\sin C}{1+\cos A\cos B\cos C}.$$

Les rapports entre OA, OB et OC seront donnés par

$$\frac{OA}{b^2c} = \frac{OB}{c^2a} = \frac{OC}{a^2b}.$$

II. — *Étant donnés les quatre angles* A, B, C, D *d'un quadrilatère, on mène par un point O quatre droites* OA, OB, OC, OD *faisant entre elles les angles consécutifs* $AOB = 2^d - A$, $BOC = 2^d - B$, $COD = 2^d - C$, *et* $DOA = 2^d - D$. *Déterminer les rapports qui doivent exister entre* OA, OB, OC, OD *pour que les angles* OBA, OCB, ODC *et* OAD *soient égaux, et calculer leur valeur commune* (*fig.* 2).

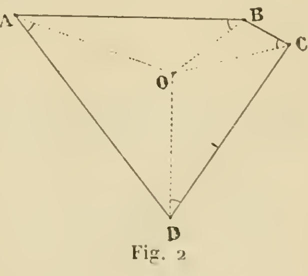


Fig. 2

Posons, comme ci-dessus, OBA $= x$ et $\operatorname{tg} x = u$; on aura :

$$\frac{\sin x}{OA} = \frac{\sin(A-x)}{OB},$$
$$\frac{\sin x}{OB} = \frac{\sin(B-x)}{OC},$$
$$\frac{\sin x}{OC} = \frac{\sin(C-x)}{OD},$$
$$\frac{\sin x}{OD} = \frac{\sin(D-x)}{OA},$$

d'où $\qquad \sin^4 x = \sin(A-x)\sin(B-x)\sin(C-x)\sin(D-x),$

ou

$u^4 - (\sin A - u\cos A)(\sin B - u\cos B)(\sin C - u\cos C)(\sin D - u\cos D) = 0.$

Cette équation développée devient :

(2) $(1-\cos A\cos B\cos C\cos D)u^4 + (\Sigma\cos\cos\cos\sin)u^3 - \Sigma(\cos\cos\sin\sin)u^2$
$+ (\Sigma\cos\sin\sin\sin)u - \sin A\sin B\sin C\sin D = 0.$

Dans chacune des sommes Σ, on doit affecter chaque facteur trigonométrique d'une des lettres A, B, C, D, sans répétition, de façon à compléter toutes les combinaisons possibles ; mais

$$A + B + C + D = 4^d$$

d'où $\quad \sin(A + B + C + D) = 0, \quad \cos(A + B + C + D) = + 1.$

En développant ces deux dernières égalités, on trouve

$$\Sigma \cos\cos\cos\sin = \Sigma \sin\sin\sin\cos$$

$$\Sigma \cos\cos\sin\sin = \Sigma \sin\sin\sin\sin = \Sigma \cos\cos\cos\cos - 1 =$$
$$\sin A \sin B \sin C \sin D + \cos A \cos B \cos C \cos D - 1.$$

L'équation (2) devient alors :

$(u^2 + 1)\{(1 - \cos A \cos B \cos C \cos D)u^2 + \Sigma\cos\cos\cos\sin - \sin A \sin B \sin C \sin D\} = 0,$
qui a deux racines imaginaires $u = \pm i$ et deux autres racines données par

(3) $(1 - \cos A \cos B \cos C \cos D)u^2 + (\Sigma\cos\cos\cos\sin)u - \sin A \sin B \sin C \sin D = 0.$

Si le quadrilatère est inscriptible, on a :

$$u = \operatorname{tg} x \pm \frac{\sin A \sin B}{\sqrt{1 - \cos^2 A \cos^2 B}}.$$

La détermination de u permet de calculer les rapports de longueur des droites OA, OB, OC, OD.

III. *Généralisation de la question.* — En désignant les angles du polygone par $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, on aura d'abord :

(4) $$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n = 2^d(n - 2),$$
d'où $\quad \sin(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = 0$
et $\quad \cos(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = \pm 1$ selon que n est pair ou impair.

Or

(5) $$\sin(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = \Sigma C_{n-1}S_1 - \Sigma C_{n-3}S_3 + \Sigma C_{n-5}S_5 - \Sigma C_{n-7}S_7 + \ldots$$

et

(6) $$\cos(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = \Sigma C_n - \Sigma C_{n-2}S_2 + \Sigma C_{n-4}S_4 - \Sigma C_{n-6}S_6 + \ldots$$

le terme général $\pm \Sigma\, C_{n-p}S_p$ indique que la somme doit être étendue à n facteurs trigonométriques, savoir p sinus et $n - p$ cosinus, en épuisant toutes les permutations des n lettres $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ dont p seront affectées de sinus, et les $n - p$ autres, de cosinus.

L'équation générale du problème est :

$u^n = (\sin A_1 - u\cos A_1)(\sin A_2 - u\cos A_2)(\sin A_3 - u\cos A_3) \ldots (\sin A_n - u\cos A_n).$

Or, en vertu de la relation (4) ou des deux (5) et (6) qui s'en déduisent, le degré de l'équation (7) peut s'abaisser à $(n - 2)$, car le premier membre est alors divisible par $(u^2 + 1)$, comme dans les cas précédents.

C'est ce qu'on pourra aisément vérifier, quel que soit n, pair ou impair. En effet, dans le premier cas, l'équation (7) devient :

(8) $$(\Sigma\, C_{n-1})u^n - u^{n-1}\Sigma C_{n-1}S_1 + u^{n-2}\Sigma C_{n-2}S_2 - u^{n-3}\Sigma C_{n-3}S_3 \ldots \ldots + u^2\Sigma C_2S_{n-1} - u\Sigma C_1S_{n-1} + \Sigma S_n = 0$$

et les relations (5) et (6) deviennent :

(9) $$\Sigma C_{n-1}S_1 - \Sigma C_{n-3}S_3 + \Sigma C_{n-5}S_5 - \Sigma C_{n-7}S_7 \ldots \ldots = 0.$$

(10) $$\Sigma C_n - \Sigma C_{n-2}S_2 + \Sigma C_{n-4}S_4 - \Sigma C_{n-6}S_6 \ldots \ldots = + 1.$$

Or, en remplaçant u^2 par -1 dans la somme des termes de degré pair,

cette somme est nulle d'elle-même, en vertu de 10, que n soit multiple de 4, ou multiple de 4 plus 2.

En mettant u en facteur commun dans les termes de degré impair, on aura, dans la parenthèse, une somme de termes de degré pair qui, pour $u^2 = -1$, s'annulera en vertu de (9).

Si d est impair, l'équation (8) devient :

$$(11)\qquad (\Sigma C_n + 1)u^n - u^{n-1}\Sigma C_{n-1}S_1 + u^{n-2}\Sigma C_{n-2}S_2 - u^{n-3}\Sigma C_{n-3}S_3 \ldots$$
$$- u^2\Sigma C_2 S_{n-2} + u\Sigma C_1 S_{n-1} - \Sigma S_n = 0.$$

La relation (9) reste la même, mais (10) se change en :

$$(12)\qquad \Sigma C_n - \Sigma C_{n-2}S_2 + \Sigma C_{n-4}S_4 - \Sigma C_{n-6}S_6 \ldots\ldots = -1$$

et l'équation (11) sera aussi vérifiée par $u^2 = -1$ en raison de (9) et de (12).

H. Lecocq.

Trouver, dans le plan d'un triangle ABC *un point* O *tel que les triangles* OAB, OAC, et OBC *soient isopérimètres.*

Soit $a > b > c$.

Prenons pour inconnues $\widehat{OAC} = x$ et $OA = y$. On doit avoir

$$y + b = a + OB$$
$$y + c = a + OC$$

d'où
$$y + OC = c + OB,$$

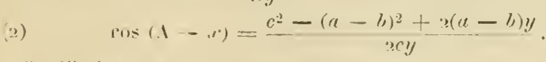
or
$$OB = \sqrt{c^2 + y^2 - 2cy\cos(A - x)}$$
$$OC = \sqrt{b^2 + y^2 - 2by\cos x}.$$

Les équations du problème sont donc :

$$\begin{cases} (a-b)^2 - 2(a-b)y = c^2 - 2cy\cos(A - x) \\ (a-c)^2 - 2(a-c)y = b^2 - 2by\cos x, \end{cases}$$

d'où

$$(1)\qquad \cos x = \frac{b^2 - (a-c)^2 + 2(a-c)y}{2by},$$



$$(2)\qquad \cos(A - x) = \frac{c^2 - (a-b)^2 + 2(a-b)y}{2cy}.$$

On éliminera x par la relation

$$\cos(A - x) = \cos A\cos x + \sin A\sin x$$

ce qui conduit à l'équation du second degré ci-dessous, dans laquelle

$$m^2 = b^2 - (a-c)^2 = 4(p-a)(p-c)$$
$$n^2 = c^2 - (a-b)^2 = 4(p-a)(p-b)$$

$$(3)\quad 4\left\{b^2(a-b)^2 + c^2(a-c)^2 - 2bc(a-b)(a-c)\cos A - b^2c^2\sin^2 A\right\}y^2$$
$$+ 4\left\{b^2n^2(a-b) + c^2m^2(a-c) - bcm^2(a-b)\cos A - bcn^2(a-c)\cos A\right\}y$$
$$+ b^2n^4 + c^2m^4 - 2bcm^2n^2\cos A = 0.$$

qu'on peut écrire, pour abréger,

$$4My^2 + 4Ny + P = 0.$$

Le dernier terme :

$$P = (bn^2 - cm^2)^2 + 4bcm^2n^2\sin^2\frac{A}{2} = 16(p-a)^2\left\{(b-c)^2(p-a)^2 + 4b^2c^2\sin^4\frac{A}{2}\right\}$$

est positif, quel que soit le triangle ABC.

N peut s'écrire :

$$N = 8(p-a)\left\{(p-a)^2(b-c)^2 + bc\sin^2\frac{A}{2}\left[(a-b)(p-c)+(a-c)(p-b)\right]\right\}$$

et, en vertu de l'hypothèse $a > b > c$ est également positif.

D'autre part, en remplaçant $2bc\cos A$ par $b^2 + c^2 - a^2$, on a :

$$M = a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)-ab(a^2+b^2)-ac(a^2+c^2)-bc(b^2+c^2)-b^2c^2\sin^2 A.$$

Soit S l'aire du triangle ; on sait que :

$$-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 = 16S^2 \quad \text{et} \quad b^2c^2\sin^2 A = 4S^2,$$

d'où

$$M = 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2+bc(a^2-b^2-c^2)+ab(c^2-a^2-b^2)+ac(b^2-a^2-c^2)-20S^2$$

$$M = 2a^2b^2\sin^2\frac{C}{2} + 4a^2c^2\sin^2\frac{B}{2} + 4b^2c^2\sin^2\frac{A}{2} - 20S^2, \text{ ou enfin}$$

$$M = 4S^2\left(\mathrm{tg}^2\frac{A}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{B}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{C}{2} - 2\right)$$

$$= 4\left\{(p-a)^2(p-b)^2 + (p-a)^2(p-c)^2 + (p-b)^2(p-c)^2 - 2S^2\right\}$$

La formule $N^2 - MP$, par un calcul qui présente plus de longueurs que de difficultés, se réduit à :

$$N^2 - MP = 64b^3c^3\sin^2 A\,\sin^2\frac{A}{2}(p-a)^2(p-b)(p-c) = \frac{256S^6}{p^2}.$$

On voit donc que les racines de l'équation (3) sont toujours réelles ; mais pour qu'elles soient acceptables, il faut qu'elles soient telles que $\cos x$ et $\cos(A - x)$ soient moindres que 1 en valeur absolue, et comme y est essentiellement positif, il suffit que y soit supérieur à la plus grande des quantités $(p - b)$ ou $(p - c)$, c'est-à-dire seulement $y > (p - c)$ en vertu de l'hypothèse $a > b > c$.

La discussion est donc très simple, puisque N et P sont positifs.

1° Si M est positif ; pas de solution car les racines sont toutes deux négatives.

2° Si M est négatif ; racines de signes contraires. La racine positive sera acceptable si elle est plus grande que $p - c$.

Application numérique (proportion de la figure)

$a = 6$, $M = -314{,}75$, $N = 919{,}5$, $P = 11\,106$,
$b = 5$,
$c = 4$, $y = 4{,}77$, $x = 32°50'$.

H. Lecocq.

SOLUTION DE LA QUESTION 714

(*Suite*, voir n° d'avril, p. 120)

La première de ces expressions pourra s'écrire

$$\frac{x-\varepsilon}{x} + \frac{y+\varepsilon}{y}.$$

Or, cette dernière expression est forcément supérieure à 2, elle est en effet égale à

$$2 + \frac{\varepsilon}{y} - \frac{\varepsilon}{x},$$

quantité supérieure à 2 puisque x est plus grand que y.

On résonnerait de même dans le cas où l'on aurait $x < y$; si $x = y$, il est évident que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ est égal à 2.

On démontrerait de la même manière que $\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)$ et $\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)$ sont supérieurs à 2. Donc la somme de ces trois expressions est supérieure à 6.

C. Q. F. D.

Remarque. — L'inégalité (2) exprime une propriété qui peut s'énoncer ainsi :

Si la somme de trois nombres est égale à l'unité, la somme de leurs inverses est plus grande que 9.

Cette propriété peut être facilement généralisée. On démontrerait, en effet, de la même façon que nous venons de le faire pour trois nombres, que si l'on a n nombres, $a, b, c, \ldots m$, tels que $a + b + c + \ldots + m = 1$ on a la relation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots + \frac{1}{m} > n^2.$$

Cette propriété conduit elle-même à une propriété encore plus générale, qui s'en déduit immédiatement :

Si la somme de n nombres est égale à a, la somme de leurs inverses est supérieure à $\frac{n^2}{a}$.

(Remarquons que dans le cas de $a = b = c = \ldots = m$, cette relation devient $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots + \frac{1}{m} = \frac{n^2}{a}$; de même que, dans les cas particuliers examinés plus haut, on aurait $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots + \frac{1}{m} = n^2$, ou

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9.$$

Solution de MM. **de la Vaissière, A. Droz-Farny, Saint-Goyens, Alfredo Schiappa Manteira, Plakhowo, Svéchnicoff, Georges Stambolieff.**

QUESTIONS PROPOSÉES

Si, dans un triangle, la droite d'Euler est parallèle au côté BC, O étant le centre du cercle circonscrit, N le centre de gravité du périmètre du triangle, h la hauteur correspondante au côté BC et r le rayon du cercle inscrit, on a

$$\overline{ON}^2 = \frac{Or^2 - h^2}{18}.$$

Jorge F. d'Avillez).

Soient deux cercles dans le plan et un point quelconque A ; on prend la polaire de ce point A par rapport aux deux cercles. Ces polaires se coupent en M. On joint A et M. Soit P le milieu de la longueur AM. Démontrer que le point P est toujours situé sur l'axe radical des deux cercles quelle que soit la loi de déplacement du point A dans le plan.

Léopold Massip.

Un cercle variable O″ intercepte sur deux circonférences données O et O′ de rayons R et R′, deux cordes égales de longueur donnée $2l$;

1° Lieu de l'intersection des cordes interceptées (axe radial de O et O′);

2° Lieu du centre O″ pour les cinq positions relatives des cercles O et O′ (hyperbole ou ellipse). **H. Lecocq.**

On donne deux couronnes circulaires auxquelles on mène des cordes parallèles AB, A′B′ tangentes aux cercles intérieurs.

Lieu des points de rencontre des droites AA′, BB′ ou AB′, BA′ qui joignent leurs extrémités (quatre cercles). **H. Lecocq.**

Étant donnés un cercle O et un point P dans son plan; mener un diamètre AB tel que le rapport $\frac{PA}{PB}$ soit donné et égal à un nombre λ.

Vazou.

Étant donnés deux cercles O et O′, trouver un point P tel que si l'on mène de ce point des tangentes PM, PM′ aux deux cercles, l'une de ces tangentes PM ait une longueur donnée l et que l'angle $\widehat{PMPM'}$ ait une valeur donnée V. **Vazou.**

Étant donnés une droite $x'x$ et un point A dans son plan, déterminer sur $x'x$ une portion de droite BC de longueur donnée a qui soit vue du point A sous un angle donné. **Vazou.**

Étant donnés un cercle O et un point A dans son plan, mener à ce cercle une tangente CB de longueur donnée a, telle que la droite AM joignant le point A au milieu de BC ait une longueur donnée m. **Vazou.**

Étant donnés un cercle O et un point A dans son plan, mener à ce cercle une tangente CB de longueur donnée a et qui soit vue du point A sous un angle donné. **Vazou.**

Le Directeur-gérant,

Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

236. Mathématiques. — Dans un cercle de rayon R placer trois cordes de longueurs données α, β, γ de manière à ce que le triangle formé par leurs intersections soit semblable à un triangle donné ayant $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ pour angles. — Expression des côtés, de la surface et du rayon du cercle circonscrit. — Cas particulier du triangle équilatéral. **H. Lecocq.**

237. — Déterminer dans le plan d'un triangle ABC un point O tel que pour les trois triangles OAB, OAC, OBC, le produit des trois côtés soit le même. **H. Lecocq.**

238. Epure. — Dans le plan horizontal de côte O, on donne un cercle de rayon 0,05 centimètres et tangent à la parallèle aux grands côtés du cadre passant par le centre de la feuille. Le point de contact ω étant ce centre même. Le point S tel que $O\omega S = 0{,}15$ centimètres est la projection du sommet du cône de cote 0,15 centimètres. Un prisme pentagonal régulier est horizontal, son arête supérieure passe par le point S et est parallèle aux grands côtés du cadre. — Intersection de ces deux corps. **Massip.**

238bis. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle connaissant $a = 25\,678^{m},45$, $b = 75\,238,48$, $C = 25°45'56''7$.

239. Questions d'Oral. — On donne deux parallèles A et B. Sur A on prend deux points α et β sur B un point γ. On joint $\beta\gamma$. On demande de tracer par α une sécante telle que la somme des triangles soit maximum au minimum.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

240. Mathématiques. — Calculer les côtés d'un triangle, connaissant r', r'' et $a + b = l$. Construction géométrique. **Vazou.**

Calculer et construire les côtés d'un triangle, connaissant r'', r''' et $B - C$. **Vazou.**

Construire un triangle, connaissant a, $b + c = l$ et la longueur α de la bissectrice de A. **Vazou.**

241. — Calculer par logarithmes

$$x = \frac{\sqrt[8]{1\,845} + \pi - 7\pi}{(1 + 1\,842)^2 \sqrt[3]{59\,667}}.$$

242. Physique et Chimie. — A l'un des plateaux d'une balance hydrostatique, on suspend, par un fil de poids négligeable, un morceau de zinc plongeant dans de l'eau ; le poids de ce zinc dans l'air est de 200 grammes.

A l'autre plateau, on suspend de la même façon un morceau de platine plongeant dans du mercure.

1° Tout l'appareil étant à la température de 0°, quel doit être le poids du morceau de platine pour que la balance soit en équilibre d'elle-même, sans poids ni tare ?

2° La température de tout le système étant alors portée à 50°, quel poids doit-on mettre pour rétablir l'équilibre, et dans quel plateau de la balance ?

Données :	Densité de l'eau à 0°.	0,999871 ;
	— du mercure à 0° . . .	13,596 ;
	— du zin à 0°	6,8
	— du platine à 0°	21,16 ;
	— de l'eau à 50°	0,9882.

Coefficient de dilatation absolue du mercure entre 0° et 100°.		$\frac{1}{3\,550}$;
— — linéaire du zinc		0,0000294 ;
— — — platine		0,0000087.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

243. Mathématiques. — On donne l'équation

$$(2 \cos \alpha - 1)x^2 - 4x + 4 \cos \alpha + 2 = 0,$$

désignant un angle aigu.

1° Pour quelles valeurs de α les racines sont-elles réelles ?

2° Quels sont les signes des racines pour ces valeurs de α ?

3° Rendre le produit des racines calculable par logarithmes.

(*Au choix*). — *a*) Démontrez les théorèmes relatifs à la théorie du plus grand commun.

b) Théorie de l'extraction de la racine carrée.

c) Caractères de divisibilité par 3 et 9.

244. Physique. — Un tube cylindrique de longueur L est ouvert à ses deux extrémités. Une partie, de longueur l, est plongée verticalement dans une cuve à mercure. On ferme alors et on maintient fermé avec le doigt l'orifice supérieur du tube, puis on élève verticalement le tube tout entier jusqu'à ce que la partie inférieure cesse de plonger dans le mercure de la cuve. On demande de caculer la longueur x comprise entre les niveaux que le mercure occupait dans le tube dans la première et dans la seconde position. On désigne par H la hauteur du baromètre pendant l'expérience.

Application numérique. $\begin{cases} 1^\circ\ L = 0^m,85, & l = 0^m,32, \quad H = 0^m,74. \\ 2^\circ\ L = 0^m,80, & l = 0^m,60, \quad H = 0^m,80. \end{cases}$

(*Au choix*). — *a*) Bouteille de Leyde — batteries.

b) Foudre — paratonnerres.

c) Aimants naturels et artificiels — pôles.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES — SCIENCES)

245. Mathématiques. — Calculer les coordonnées du point A symétrique du point B par rapport à un point C, B a pour coordonnées α, β ; C a pour coordonnées γ, δ.

(*Au choix*). — *a*) Centre de gravité d'un trapèze, d'un prisme.

b) Réduction d'un nombre quelconque de forces appliquées à un corps solide d'abord, à trois, puis à deux.

c) Condition d'équilibre d'un corps solide libre sollicité par un nombre quelconque de forces.

245bis. Physique. — Le courant produit par une pile de 100 éléments Bunsen passe dans un circuit extérieur dont la résistance est égale à 10 ohms. On demande quelle sera l'intensité du courant si l'on dispose les 100 éléments en 4 séries de 25 chacune, associées en batteries. Comment faudrait-il disposer les éléments pour rendre maximum l'intensité du courant? — Force électromotrice d'un élément Bunsen : 1,9 volt ; résistance intérieure de cet élément : 0,1 ohm.

245ter (*Au choix*). — *a*) Pendule et applications.

b) Machine d'atwood et lois de la chute des corps.

c) Densité des gaz.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

246. Arithmétique. — Une personne avait placé une somme à 5 %. Elle l'a retirée au bout d'un an et du capital réuni aux intérêts elle a fait deux parts. Le tiers est employé à acheter de la rente à $4\ {}^1/_2$ % au cours de 111, ce qui donne un intérêt annuel de 350. Les deux tiers qui restent sont placés à 3 % et donnent 603 francs d'intérêt par an. On demande quelle somme cette personne avait d'abord placée et quel est le cours du 3 %.

246bis. — Calculer $x = \sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{278\,940 + \sqrt{7\,528}}{\pi \times \sqrt{6\,754}}}}$.

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

247. Arithmétique. — Une roue qui a 14 dents tourne de 5 dents en 9 secondes. Une autre roue fait 21 tours pendant que la première en fait 25. Combien les deux roues feront-elles de tours en 3 heures 40 minutes et 30 secondes.

248. Algèbre. — Résondre $2x + 2\sqrt{a^2 + x^2} = \dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

248bis. — Calculer : $x = \sqrt[5]{\sqrt[3]{7\,578} + \sqrt{75\,628}}$.

DEUXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Cours de Géométrie Descriptive. — *Géométrie Cotée* à l'usage des candidats à Saint-Cyr, par J. Caron, ancien élève de l'Ecole Normale supérieure, agrégé des Sciences Mathématiques, directeur des travaux graphiques à l'Ecole Normale supérieure, professeur de Géométrie descriptive. — Librairie *Félix Alcan*, 108, boulevard Saint-Germain. Prix : 6 francs.

Le nouveau programme de Saint-Cyr a fait faire des progrès à la Géométrie cotée jusqu'ici trop dédaignée. Après les remarquables ouvrages que nous avons déjà signalés, d'autres ont vu le jour, beaucoup sont sous presse. M. Caron, dont tous les professeurs et tous les élèves connaissent déjà la *Géométrie Descriptive* à l'usage des classes de Spéciales vient, avec l'autorité qui s'attache à son nom, de faire paraître sa *Géométrie Cotée*.

Le texte en est clairement rédigé, les figures y sont nettes; de nombreux exercices théoriques et numériques intéresseront les candidats et les forti-

fieront dans leurs études. L'ouvrage est divisé en quatorze livres et chaque livre en chapitres. Ces derniers, dans les différents paragraphes qui les composent, renferment toutes les questions. Pour que nos lecteurs s'en rendent compte, nous allons leur détailler le livre X, par exemple, relatif aux surfaces de révolution :

CHAPITRE I

I. *Propriétés des surfaces de révolutions.*

II. *Déterminer un point d'une surface de révolution. — Plan tangent en ce point.*

III. *Contours apparents.*

CHAPITRE II

I. *Plan tangent parallèle à un plan donné.*

II. *Points brillants.*

III. *Plan tangent ayant son point de contact sur une parallèle donnée.*

IV. *Plan tangent ayant son point de contact sur un méridien donné.*

G. M.

TROISIÈME PARTIE

QUESTION 716

Démontrer que :

$$\frac{a^2b^2}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)} = \frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2}\,\frac{1}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}$$

$$- \frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2}\,\frac{1}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} - \frac{1}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2}.$$

E.-N. Barisien.

Solution, par **A. Droz-Farny.**

Représentons respectivement par A, B, C les trois termes de droite ; on a :

$$A - B = \frac{(a^2+b^2)^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) - (a^2+b^2)(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)}{a^2b^2(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)}.$$

$$A - B - C = \frac{(a^2+b^2)(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) - (a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2}$$

$$= \frac{a^2b^2}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)}.$$

A. Droz-Farny.

Solutions exactes de MM. **Plakhowo, Stambolieff.**

QUESTIONS 717 ET 718

717. — *Comment peut-on écrire immédiatement les carrés des nombres de la forme* 10a + 5 *et* 100a + 5 ? (a < 10).

(**Jean Negretzu**).

718. — *Les carrés de nombres de la forme* 10a + 5, 100a + 5 *et*

$1\,000a + 5$ *étant supposés formés, comment peut-on écrire immédiatement les racines carrées.*

(Généralités) (Jean Negretzu).

Elevons le nombre $10a + 5$ au carré, nous aurons $100a^2 + 100a + 25$. Prenons maintenant 100 comme diviseur commun, — nous aurons $100(a^2 + a) + 25$, ou $100a(a + 1) + 25$; cela veut dire que si le nombre est $10a + 5$ pour former son carré, il ne faut que multiplier le nombre a, par son suivant et écrire à la fin 25.

Si nous avons $100a + 5$ élevons ce nombre au carré, nous aurons $10\,000a^2 + 1\,000a + 25$. Prenons maintenant 100 comme diviseur commun, nous aurons $100(100a^2 + 10a) + 25$, ou $100[10a(10a + 1)] + 25$. Ainsi le carré du nombre $100a = 5$ sera égal à $10a(10a + 1)$ et à 25 écrit à sa droite. Si nous avons $1\,000a + 5$, élevons ce nombre au carré, nous aurons $1\,000\,000a^2 + 10\,000a + 25$. Prenons de nouveau 100 comme diviseur commun, nous aurons $100(10\,000a^2 + 100a) + 25$ ou $100[100a(100a + 1)] + 25$.

Ainsi on peut généraliser ce problème en disant que tout nombre, ayant à sa gauche un nombre quelconque suivi de quelques zéros et terminé par un 5, élevé au carré, sera égal au nombre de ces dizaines, multiplié par ce même nombre augmenté d'une unité, et ayant 25 à sa droite.

Si nous avons maintenant $100a + 10b + 5$, et si nous l'élevons au carré, nous aurons $(100a + 10b)^2 + 10(100a + 10b) + 25 = 10\,000a + 2\,000b + 100b^2 + 1\,000a + 100b + 25$; prenant 100 comme diviseur commun, nous aurons $100(100a^2 + 20b + b^2 + 10a + b) + 25$; où, prenant $a + b$ comme diviseur commun, nous aurons $100[(10a + b)(a + b + 1)] + 25$.

Si les carrés de ces nombres sont formés comme par exemple : $100a(a + 1) + 25$, alors on pourra écrire tout de suite la racine carrée de ce nombre.

a désigne les distances, cela veut dire que si a est multiplié par $a + 1$, la racine carrée de ce nombre sera $10a + 5$, — et ainsi de suite.

La racine carrée du nombre $100[10a(10a + 1)] + 25$, sera : $100a + 5$; sa racine carrée du nombre $100[(10a + b)(10a + b + 1)] + 25$ sera $100a + 10b + 5$, en suuposant bien entendu que $a < 10$ et que $b < 10$.

N. Plakhowo.

Solution exacte : M. **L'Huillier.**

QUESTION 719

Solution, par M. **A. Boutin**

Dans tout triangle T *de sommets* A, B, C :

1° *Le produit des distances d'un sommet aux quatre centres des cercles tangents aux trois côtés est égal au produit des carrés des deux côtés aboutissant au sommet considéré.*

2° *Le produit des douze distances de chacun des centres des cercles tangents aux trois côtés de* T *est égal à la quatrième puissance du produit des trois côtés.*

3° *Le produit des segments interceptés par les sommets de* T *sur les cotés du triangle formé par les centres des cercles inscrits à* T *est égal au carré du produit des trois côtés de* T.

4° *Le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par trois quelconques des quatre centres des cercles tangents aux côtés de* T *est égal au double du rayon du cercle circonscrit à* T.

5° *L'aire du triangle formé par le centre des cercles ex-inscrits à* T *est équivalente au produit du périmètre de* T *par le rayon de son cercle circonscrit.*

6° *Les aires des triangles formés par les centres des quatre cercles tangents à* T *sont inversement proportionnelles, chacune au rayon du cercle tangent dont le centre n'est pas un sommet du triangle.*

7° *On considère le triangle dont un des sommets est le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle* A *et les autres sommets sont* B *et* C.

On considère les deux triangles analogues. Le produit des aires de ces trois triangles, multiplié par le produit des rayons de leurs cercles circonscrits, est égal au cube de l'aire de T, *multiplié par le cube du rayon de son cercle circonscrit.* **(E.-N. Barisien).**

1° Des formules connues :

$$AI = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}, \quad AI' = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}, \quad AI'' = \frac{p-c}{\sin\frac{A}{2}}, \quad AI''' = \frac{p-b}{\sin\frac{A}{2}}.$$

On tire :

$$AI.AI'.AI''.AI''' = \frac{p(p-a)(p-b)(p-1)}{\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}} = b^2c^2.$$

2° Le produit des douze distances en question, d'après le paragraphe précédent, est : $b^2c^2.a^2c^2.a^2b^2 = a^4b^4c^4.$

$$3° \quad BI'.BI''.AI'''.AI''.CI''.CI' = \frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} = a^2b^2c^2.$$

4° I est l'orthocentre du triangle I'I''I''', donc les quatre triangles obtenus en prenant trois quelconques de ces points pour sommets ont même cercle circonscrit ; son diamètre a pour valeur :

$$\frac{I''I'''}{\sin I'} = \frac{4R\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = 4R.$$

5° L'aire considérée a pour expression :

$$\frac{1}{2}\, I'I''.I'I'''\sin I' = 8R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2pR.$$

6° On a, comme au paragraphe précédent :

$$II''I''' = \frac{1}{2}\cdot\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{abc}{2}\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}}{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{abc}{2r'},$$

d'où

$$II''I'''.r' = II'I'''.r'' = II'I''.r''' = \frac{abc}{2} = 2RS = 2pRr = I'I''I'''.r.$$

7° Le produit de l'aire d'un des triangles considérés par un rayon de son cercle circonscrit a pour expression :

$$\frac{a.\mathrm{I'B.I'C}}{4} = \frac{a(p-b)(p-c)}{4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

d'où, pour la quantité cherchée :

$$\frac{abc}{64}\cdot\frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{a^3b^3c^3}{64} = S^3R^3.$$

Solutions : MM. **L'Huillier, L. Goyens, A. Droz-Farny.**

QUESTION 721

Solution, par M. **Ernest Foucart**

Montrer que si les trois côtés a, b, c *d'un triangle vérifient la relation*

$$5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(bc + ca + ab),$$

le centre de gravité du triangle est situé sur la circonférence du cercle inscrit.

E.-N. Barisien.

L'équation du cercle inscrit est

$$(1)\qquad \sum \cos\frac{A}{2}\sqrt{x} = 0.$$

On a
$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc},$$

(1) peut donc s'écrire

$$\sum \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}x} = 0$$

ou

$$\sum \sqrt{\frac{b+c-a}{4bc}x} = 0.$$

Les coordonnées du centre de gravité étant inversement proportionnelles aux côtés correspondants, ce point sera sur le cercle inscrit si

$$\sum \sqrt{\frac{b+c-a}{4bc}\frac{1}{a}} = 0,$$

c'est-à-dire si

$$\sum \sqrt{b+c-a} = 0,$$

ce qui, tous calculs faits, donne

$$5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(bc + ca + ab).$$

C'est la relation indiquée.

Solutions exactes de MM. **Boutin, Jorge F. d'Avillez, A. Droz-Farny, L. Goyens, Plakhowo, L'Huillier, Francis Dauzats.**

QUESTION 722

1° *Dans le triangle rectangle isoscèle, si le rapport de l'hypoténuse au côté est compris entre* $\frac{m}{n}$ *et* $\frac{p}{q}$, *il est compris entre* $\frac{p+2q}{p+q}$ *et* $\frac{m+2n}{m+n}$.

2° *Dans le triangle équilatéral, si le rapport de la hauteur au coté est compris entre* $\frac{m}{n}$ *et* $\frac{p}{q}$, *il est compris entre* $\frac{4m+3n}{4(m+n)}$ *et* $\frac{4p+3q}{4(p+q)}$.

1° Le rapport est $\sqrt{2}$. Supposons $\frac{p}{q} > \sqrt{2}$ et cherchons α, β, γ, δ tels que

$$\frac{\alpha p + \beta q}{\gamma p + \delta q} < \sqrt{2}.$$

On déduit de cette inégalité

$$\frac{p}{q} > \frac{\beta - \delta\sqrt{2}}{\gamma\sqrt{2} - \alpha}.$$

Elle sera satisfaite si l'on a

$$\frac{\beta - \delta\sqrt{2}}{\gamma\sqrt{2} - \alpha} \leqslant \sqrt{2},$$

ou $$\beta - 2\gamma + \sqrt{2}(\alpha - \delta) < 0.$$

En particulier, le 1er nombre s'annule si

$$\alpha = \delta, \quad \gamma = 1, \quad \beta = 2.$$

Si donc on a $\frac{p}{q} > \sqrt{2}$, on a aussi $\frac{\lambda p + 2q}{p + \lambda q} < \sqrt{2}$.

2° Le rapport est $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Nous avons à chercher les valeurs de α, β, γ, δ telles que si $\frac{m}{n} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a $\frac{\alpha m + \beta n}{\gamma m + \delta n} < \frac{\sqrt{3}}{2}$,

on en déduit $$\frac{m}{n} < \frac{\delta\sqrt{3} - 2\beta}{2\alpha - \gamma\sqrt{3}},$$

et on doit avoir $$\frac{\delta\sqrt{3} - 2\beta}{2\alpha - \gamma\sqrt{3}} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ou bien $$2\sqrt{3}(\delta - \alpha) + 3\gamma - 4\beta \geqslant 0.$$

En particulier, le premier nombre est nul si l'on a

$$\alpha = \delta, \quad \gamma = 4, \quad \beta = 3.$$

Si donc, on a $\frac{m}{n} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a aussi $\frac{\lambda m + 3n}{4m + \lambda n} < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On vérifie également que les valeurs $\alpha = \delta = 4$, $\gamma = 3$, $\beta = 1$ de l'énoncé satisfont à l'inégalité précédente. **H. L'Huillier.**

QUESTION 723

Solution, par M. **Jorge d'Avillez**

En désignant par h_1, h_2, h_3 *les hauteurs relatives aux côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC; *par* r_1, r_2, r_3 *les rayons des cercles exinscrits correspondants, on a (notations ordinaires)*

$$\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 = \frac{8R^2 + r^2 - p^2}{2r^2}.$$

Dair Daglou.

On sait que $$r_1 = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

$$h_1 = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

donc $$\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 = \frac{a^2}{4(p-a)^2} = \frac{(r_1-r)^2}{4r^2},$$

et, de même $$\left(\frac{r_2}{h_2}\right)^2 = \frac{b^2}{4(p-b)^2} = \frac{(r_2-r)^2}{4r^2},$$

$$\left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 = \frac{c^2}{4(p-c)^2} = \frac{(r_3-r)^2}{4r^2}.$$

On aura alors

$$\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 = \frac{(r_1-r)^2 + (r_2-r)^2 + (r_3-r)^2}{4r^2},$$

donc

$$\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 3r^2 - 2r(r_1 + r_2 + r_3)}{4r^2}.$$

En substituant ci-dessus les formules connues

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 16R^2 - r^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr,$$
$$r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r,$$

on a finalement

$$\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 = \frac{8R^2 + r^2 - p^2}{2r^2}.$$

Solutions exactes : MM. **Plakhowo, Boutin.**

QUESTION 725

Solution, par **Svéchnicoff** à Ouralsk

Les perpendiculaires élevées respectivement aux côtés AB *et* AC *du triangle* ABC *par les sommets* B *et* C *coupent, l'une au point* B', *l'autre au point* C', *la bissectrice intérieure de l'angle* BAC. *Démontrer que le cercle tangent en* A *à* AB, *et passant par* B', *et le cercle en* A *à* AC *et passant par* C' *se coupent sur la médiane issue de* A.

(M. d'Ocagne.)

Soient P et Q les centres de ces cercles et B'' et C'' les milieux des droites AB' et AC'. Les triangles semblales APB'' et AQC'' donnent $\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{AB''} : \overline{AC''}$, d'où l'on a $\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{AB'} : \overline{AC'}$. Les triangles semblables ABB' et ACC' donnent $\overline{AB'} : \overline{AC'} = \overline{AB} : \overline{AC}$. Ainsi, on a $\overline{AP} : \overline{AQ} = c : b$. Continuons la droite CA et prenons $\overline{AD} = \overline{AC}$. Alors $\widehat{BAD} = \widehat{PAQ}$. Les triangles APQ et ABD sont semblables. Il en résulte que $\widehat{AQP} = \widehat{ADB}$. Soit M le point d'intersection des circonférences P et Q. $\widehat{BAM} = \widehat{QAM} = \widehat{QAB} = (90^\circ - \widehat{AQP}) - (90^\circ - \widehat{BAC}) = \widehat{BAC} - \widehat{AQP} = \widehat{BAC} - \widehat{ADB} = <$ ADD. Donc, la droite AM est parallèle à BD et le point M est situé sur la médiane du triangle ABC issue de A.

Solutions exactes : **Ernest Foucart, A. Droz-Farny, Francis Dauzats. L'Huillier.**

QUESTION 726

Solution, par **Ernest Foucart**

Soit ABCD *un quadrilatère dont les diagonales se coupent en* O *à angle droit. Les perpendiculaires élevées en* A *à* AB *et en* C *à* CD *se coupent en* H*; les perpendiculaires élevées en* B *à* AB *et en* D *à* CD *se coupent en* I. *Les symétriques du point* H *par rapport à* A *et* C *sont* a *et* c, *du point* I *par rapport à* B *et* D, b *et* d. *On prend les isotomiques* α, β, γ, δ *des points* C, D, A, B *respectivement par rapport aux segments* OA, OB, OC, OD. *Démontrer que les droites* aα, bβ, cγ, dδ *sont perpendiculaires à la direction commune des droites* αβ *et* γδ.

(M. d'Ocagne).

Démontrons que $a\alpha$ est perpendiculaire à $\alpha\beta$ (démonstrations analogues pour les autres cas).

Soit $ABO = \theta, \quad CDO = \theta'$.

On a $\widehat{HCA} = \theta, \quad AHC = \theta - \theta'$.

Le triangle AHC donne alors

$$Aa = AH = AC \frac{\sin\theta'}{\sin(\theta - \theta')}.$$

Le triangle $\alpha O\beta$ donne

(1) $$\operatorname{tg} \beta\alpha O = \frac{\beta O}{\alpha O} = \frac{BD}{CD}.$$

On sait que dans un triangle quelconque, on a (notation habituelle)

$$\operatorname{cotg} B = \frac{c - b\cos A}{b \sin A}.$$

Cette formule, appliquée au triangle $A\alpha a$, donne

$$\operatorname{cotg} \widehat{A\alpha a} = \frac{A\alpha - Aa\cos \widehat{\alpha A a}}{Aa \sin \alpha A a} = \frac{OC + AC\dfrac{\sin\theta'}{\sin(\theta-\theta')}\cos\theta}{AC\dfrac{\sin\theta'}{\sin(\theta-\theta')}\sin\theta}$$

$$\operatorname{cotg} A\alpha a = \frac{OC\dfrac{\sin(\theta-\theta')}{\sin\theta\sin\theta'} + AC\operatorname{cotg}\theta}{AC} = \frac{OC(\operatorname{cotg}\theta' - \operatorname{cotg}\theta) + AC\operatorname{cotg}\theta}{AC}$$

$$\operatorname{cotg} A\alpha a = \frac{AO\operatorname{cotg}\theta + OC\operatorname{cotg}\theta'}{AC} = \frac{BO + OD}{AC} = \frac{BD}{AC}$$

(2) $$\operatorname{cotg} \widehat{A\alpha a} = \frac{BD}{AC}.$$

La comparaison de (1) et (2) montre que $\alpha\beta$ et $a\alpha$ sont rectangulaires.

C.Q.F.D.

QUESTION 727

Solution, par **Ernest Foucart**

Soient a, b, c *les sommets d'un triangle,* O *le cercle inscrit à ce triangle et* o *le centre de ce cercle. On mène à* o *une tangente quelconque* T, *elle rencontre la droite* oa *en un point d'où l'on mène une autre tangente à* O. *Cette dernière droite rencontre en* α *le côté du triangle opposé au*

sommet a : *on obtient de même, avec* T, *les points* β *et* γ *sur les deux autres côtés du triangle. Démontrer que les points* α, β, γ *appartiennent à une droite qui passe par le centre* o. (**Mannheim**).

Soient a', b', c', les points de contact de O avec bc, ca, ab ; a_1, b_1, c_1 les points de contact avec O des tangentes qui déterminent les points α, β, γ, m le point de contact de T. Les droites ma_1, mb_1, mc_1 sont respectivement parallèles à $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$. Il est alors facile de voir que $\widehat{b_1c'} = \widehat{b'c_1}$ $\widehat{b_1a'} = \widehat{b'a_1}$. Donc a_1a', b_1b', c_1c' sont parallèles. Les points α, β, γ sont évidemment sur une même droite passant par o et perpendiculaire à la direction commune de ces droites.

Solutions exactes : MM. **Francis Dauzats**; **A. Droz-Farny**; **L'Huillier.**

QUESTION 728

Étant donnés trois nombres positifs x, y, z *tels que* $x + y + z = 1$; on a : 1° $x^2(1 - x) + y^2(1 - y) + z^2(1 - z) > b(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)$;

2° $\dfrac{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}{(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)} > 8$;

3° $xyz > \dfrac{1}{24}$. **J.-F. d'Avillez.**

Il faut prouver que $(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) < xyz$. Si nous remplaçons l'unité par $x + y + z$, nous aurons à prouver que

$$(x + y + z)(x + z - y)(z + y - x) < xyz.$$

Développons le premier nombre ; nous aurons :

$$x^2z + yz^2 + x^2y + y^2z + xy^2 + xz^2 - 2xyz - x^3 - y^3 - z^3 < xyz,$$

ou, en simplifiant, nous aurons

$$3xyz + x^3 + z^3 + y^3 > xz(x + z) + yz(y + z) + xy(x + y).$$

et si nous avons l'inégalité (α) $3xyz < x^3 + y^3 + z^3$, ce qui peut être prouvé facilement et en retranchant cette inégalité de la proposée, nous aurons $2(x^3 + y^3 + z^3) > xz(x + z) + yz(y + z) + xy(x + y)$,

ce qui est facile à démontrer directement, puisque $x^2 + y^2 > 2xy$, et, maintenant, en multipliant cette inégalité par $x + y$, nous aurons

$$x^3 + y^3 + xy(x + y) > 2xy(x + y).$$

En simplifiant $x^3 + y^3 > xy(x + y)$;

et de même $y^3 + z^3 > yz(y + z)$, et $z^3 + x^3 > zx(z + x)$.

Ajoutons ces inégalités membre à membre

$$2(x^3 + y^3 + z^3) > xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x),$$

et si cette inégalité est vraie, nous aurons l'inégalité à prouver

$$(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) < xyz ;$$

et nous aurons

1° $x^2(1 - x) + y^2(1 - y) + z^2(1 - z) > b(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)$;

et par là est résolue partiellement la question 1704, proposée par M. Weill dans les *Nouv. An.* 1893.

2° $\dfrac{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}{(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)} > 8$; mais cette inégalité n'est pas juste si

l'un des facteurs du dénominateur devient négatif, puisque le quotient devient aussi négatif et qu'une quantité négative ne peut jamais être plus grande qu'une quantité positive. Quant à

3° $$xyz < \frac{1}{24}.$$

Elevons au cube l'équation de condition, nous aurons

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3\left[x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(x + y)\right] + 6xyz = 1$$

Cela veut dire que $6xyz < 13\left[x^2(1 - x) + y^2(1 - y) + z^2(1 - z)\right]$,
et puis, comme il a été prouvé que

$$6xyz < x^2(1 - x) + y^2(1 - y) + z^2(1 - z),$$

en multipliant cette inégalité par 3, nous aurons

$$18xyz < 3\left[x^2 + (1 - x)\, y^2(1 - y) + z^2(1 - z)\right],$$

ajoutons ces inégalités, nous aurons $24xyz < 1$, où $xyz < \frac{1}{24}$.

J'ai dit que l'inégalité (α) est facile à démontrer

$$x^2 + y^2 > 2xy\,; \quad x^2 + z^2 > 2yz\,; \quad z^2 + x^2 > 2zx.$$

ajoutons ces inégalités, nous aurons en simplifiant

$$x^2 + y^2 + z^2 > xy + yz + zx.$$

Multiplions cette inégalité par $x + y + z$, nous aurons en simplifiant

$$x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz.$$

Plakhowo.

Solutions exactes : MM. **L'Huillier, Alfredo Schiapper (Monteïro).**

Dans tout triangle on a $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq \frac{1}{8}$; et quand l'égalité a lieu le triangle est équilatéral.

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\,\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{abc},$$

ou
$$= \frac{(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}{8abc},$$

et nous avons démontré que $abc > (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$, cela veut dire que $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2} < \frac{1}{8}$, et si le triangle est équilatéral, $a = b = c$. Alors le numérateur devient égal au dénominateur et

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}.$$

Plakhowo.

QUESTION 730

Solution, par **Svéchnicoff**

Rendre rationnelle l'équation

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^4 - \left(a^2x^{\frac{2}{3}} + b^2y^{\frac{2}{3}}\right) = 0.$$

E.-N. Barisien.

On trouve successivement

$$x^{\frac{8}{3}} + 4y^{\frac{2}{3}}x^2 + by^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}} + 4y^2x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{8}{3}} - a^2x^{\frac{2}{3}} - b^2y^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$x^{\frac{2}{3}}(x^2 + 4y^2 - a^2) + y^{\frac{2}{3}}(4x^2 + y^2 - b^2) = -by^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}},$$

$$x^2(x^2 + 4y^2 - a^2)^3 + y^2(4x^2 + y^2 - b^2)^3 - 18y^2x^2(x^2 + 4y^2 - a^2)(4x^2 + y^2 - b^2) = -216y^4x^4.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 742

Soit donné un triangle ABC *et soient* A_1, B_1, C_1, *les points où les médianes coupent le cercle circonscrit au triangle* ABC. *Si* S *et* S_1 *représentent les surfaces des triangles homologiques* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *on a la relation*

$$\frac{S_1}{S} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{\left[2(b^2 + c^2) - a^2\right]\left[2(a^2 + c^2) - b^2\right]\left[2(a^2 + b^2) - c^2\right]}.$$

Jorge F. d'Avillez.

Soient M le point de rencontre des médianes du triangle ABC : A′, B′, C′ les pieds des médianes ; m_a, m_b, m_c, les longueurs des médianes AA′, BB′, CC′. On sait que

$$(1)\quad m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4},\quad m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4},\quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4},$$

Le triangle MAB et MA_1B_1 sont semblables. On a donc pour le rapport de leurs surfaces

$$(2)\qquad \frac{MA_1B_1}{MAB} = \frac{\overline{MA_1}^2}{\overline{MB}^2} = \frac{(MA' + A_1A')^2}{\overline{MB}^2} = \frac{\left(\frac{1}{3}m_a + A_1A'\right)^2}{\overline{MB}^2}.$$

Or, $\quad A_1A' \times AA' = CA' \times A'B, \quad A_1A' \times m_a = \frac{a^2}{4}.$

Donc $A_1A' = \frac{4m_a}{a^2}$, et comme $MB = \frac{2}{3}m_b$, l'expression (2) devient

$$\frac{MA_1B_1}{MAB} = \frac{9(4m_a^2 + 3a^2)^2}{576m_a^2m_b^2}.$$

Mais, d'après (1) $\quad 4m_a^2 + 3a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2).$

Donc
$$\frac{MA_1B_1}{MAB} = \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)^2}{144m_a^2m_b^2}.$$

Or,
$$MAB = \frac{2}{3}AA'B = \frac{S}{3};$$

par conséquent,

$$(3)\qquad MA_1B_1 = \frac{3S(a^2 + b^2 + c^2)^2}{144m_a^2m_b^2}.$$

En faisant la somme des trois aires MA_1B_1, MA_1C_1 et MB_1C_1, on a

$$S_1 = \frac{3S(a^2+b^2+c^2)^2}{144}\left[\frac{1}{m_a^2m_b^2} + \frac{1}{m_a^2m_c^2} + \frac{1}{m_b^2m_c^2}\right] = \frac{3S(a^2+b^2+c^2)^2(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}{144m_a^2m_b^2m_c^2}.$$

En remplaçant m_a, m_b, m_c par les valeurs (1), on trouve l'expression proposée.

Remarque. — On trouve aussi que

$$\frac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{AB}^2} + \frac{\overline{A_1C_1}^2}{\overline{AC}^2} + \frac{\overline{B_1C_1}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{3S_1}{S}.$$

(**E.-N. Barisien**).

Solutions exactes : MM. **Ernest Foucart, Francis Dauzats, L'Huillier.**

QUESTION 743

Solution, par **Ernest Foucart**

L'inverse de la longueur commune des demi-droites, issues du point de Jérabek d'un triangle, est égale à la somme des inverses des côtés du triangle. (**Jorge F. d'Avillez**).

Les coordonnées du point de Jérabek sont

$$x = \frac{2S}{a}\,\frac{a(b+c) - bc}{bc + ca + ab},$$

$$y = \frac{2S}{b}\,\frac{b(c+a) - ca}{bc + ca + ab},$$

$$z = \frac{2S}{c}\,\frac{c(a+b) - ab}{bc + ca + ab}.$$

La longueur de la demi-droite issue du point d'abcisse x étant donnée par la formule

$$\frac{1}{l} = \frac{4S}{a(2S - ax)},$$

on a pour la demi-droite issue du point de Jérabek

$$\frac{1}{L} = \frac{4S}{a\left(2S - 2S\,\dfrac{a(b+c) - bc}{bc + ca + ab}\right)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Solution exacte : **Francis Dauzats.**

SOLUTION DE LA QUESTION 756

Par **Jorge F. d'Avillez**

ABC *est un triangle isoscèle. On abaisse sur la base la perpendiculaire* AH. *Sur cette droite, on a le centre* O *du cercle inscrit au triangle* ABC *et le point* D *où elle rencontre le cercle circonscrit à* ABC.

Démontrer que si AO *est double de* HD *le triangle* ABC *est équilatéral.*

Mannheim.

SOLUTION

Si AO = 2HD, on a, en substituant les valeurs connues

$$b\sqrt{\frac{p-a}{p}} = 4R - 2h_a,$$

R étant le rayon du cercle circonscrit et h_a la hauteur AH.

On a encore

$$b\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}} = \frac{ab^2}{S} - \frac{4S}{a} = \frac{a^2b^2 - 4S^2}{aS}.$$

donc, comme l'on a
$$S = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$$
il vient
$$b\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}} = \frac{a^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}},$$
et
$$b^2(2b - a) = \frac{a^4}{2b - a}.$$
On a donc l'égalité
$$4b^4 - 4ab^3 + a^2b^2 = a^4,$$
laquelle est vérifiée par $b = a$; donc, le triangle est équilatéral..

Jorge F. d'Avillez.

Solutions exactes : MM. **Jeunet, Plakhowo, Brand, A. Droz-Farny, Goyens.**

QUESTIONS PROPOSÉES

L'aire du triangle ayant pour sommets les projections du centre de gravité sur les côtés est égale à $\frac{4S^3(a^2 + b^2 + c^2)}{9a^2b^2c^2}$, a, b, c et S désignant les côtés et l'aire du triangle donné.

(**E.-N. Barisien**).

Soient : A′, B′, C′ les pieds des bissectrices intérieures du triangle ABC; O le point de concours de ces bissectrices; A″, B″, C″ les milieux de AA′, BB′, CC′; S et $2p$ la surface et le périmètre du triangle ABC; Σ la surface du triangle A″B″C″. Démontrer les relations
$$\Sigma = \frac{AA'.BB'.CC'}{16p} = \frac{p^3}{2S^2}.\, OA''.OB''.OC'',$$

(**E.-N. Barisien**).

Soient : A′, B′, C′ les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle ABC; O leur point de concours; A″, B″, C″ les milieux des bissectrices AA′, BB′, CC′; p, r, R, le demi-périmètre, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, S′ l'aire du triangle A′B′C′. Démontrer les relations
$$AA'.BB'.CC' = 4p.S',$$
$$OA.OA'.OA''.OB.OB'.OB''.OC.OC'.OC'' = \frac{4R^2r^2S'^2}{p^2} = \frac{4R^2S'^2}{S^2}.$$

(**E.-N. Barisien**).

Soient : S le centre des symédianes d'un triangle ABC; A′, B′, C′ les projections du point S sur les côtés BC, CA, AB. Montrer que les trois triangles OB′C′, OC′A′, OA′B′ sont équivalents. (**E.-N. Barisien**).

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

249. Mathématiques. — On donne une parabole de sommet S, de foyer F. Sur l'axe on prend un point E tel que FE soit égal aux deux tiers de FS. Au point O tel que FO = FE (O entre F et S) on élève la perpendiculaire à l'axe. On joint le point E au point mobile μ parcourant cette perpendiculaire. La droite qui joint D et μ (D, intersection de l'axe et de la directrice) rencontre la parabole en ν. On joint O et ν qui rencontre $E\mu$ en M. Lieu du point M quand le point μ décrit la perpendiculaire élevée en O à l'axe de la parabole. **Léopold Massip.**

249 bis. — On donne un demi-cercle de diamètre AB. On trace une corde variable CD parallèle à AB. On projette C en E sur AB. On joint E, D. Du point B on abaisse la perpendiculaire BI sur ED. On prend le milieu M de BI et on tire EM. Déterminer la position de CD telle que le triangle EBI soit maximum. Déterminer la position de CD telle que EM soit perpendiculaire à BI.

250. — Décrire au milieu de la feuille une circonférence de centre S et de R = 7 centimètres et mener dans cette circonférence 3 rayons faisant entre eux consécutivement des angles de 120°.

Le point S et les extrémités *a*, *b*, *c*, des rayons ont respectivement pour côtés :

$S = 12^{cm},25$; $a = 2^{cm},50$; $b = 4^{cm},25$; $c = 1^{cm},75$.

Ces 3 droites SA, SB, SC déterminent un trièdre dont on demande de trouver les 6 éléments.

2° Le trièdre et le PH forment un tétraèdre que l'on construit et on demande de déterminer la sphère inscrite dans le tétraèdre, ainsi que la plus courte distance de deux droites opposées.

3° On mène dans l'intérieur de ce tétraèdre un plan N à chaque face et à une distance de cette face = 8 centimètres, on enlève les petites pyramides ainsi détachées par chacun des plans et on demande de représenter le solide restant.

La sphère inscrite sera tracée en rouge.

250 bis. Calcul trigonométrique. — Résoudre un triangle connaissant :

$$h = 122^m,75, \quad a = 1825^m,45, \quad A = 28°31'40''5.$$

250 ter. Questions d'oral. — Démontrer que la surface d'un trapèze est égale au produit de l'un des côtés non parallèles par la distance à ce côté du milieu du côté opposé.

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

251. Mathématiques. — I. Résoudre un triangle rectangle en A connaissant le périmètre $2p$ et l'angle B au moyen de formules calculables par logarithmes.

Cas particulier $B = 60°$.

251 bis. — Résoudre l'équation :

$$\cos 2x + 4(2m - 5) \cos x + 3 = 0$$

et discuter en faisant varier m.

251 ter. — III. Maximum et minimum de : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$.

252. Calcul logarithmique. — Calculer

$$x = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\pi} + 231\,478} + 75\,781}}{2,4789 - 1,665 + 1825}.$$

253. Physique. — Un tube recourbé ABCDE se termine par deux branches verticales cylindriques AB et DE et dont les diamètres ont respectivement 6 centimètres et 1 centimètre. On verse du mercure dans le tube jusqu'à ce que le niveau M dans la branche DE soit à 30 centimètres de l'extrémité E, puis on achève de remplir le tube DE avec de l'eau. On demande de déterminer quelle sera alors la position de la surface de séparation du mercure et de l'eau dans le tube DE. On place ensuite dans le tube AB un cylindre du poids de 4 kilogrammes reposant sur la surface du mercure et faisant fonction de piston. On demande de déterminer la nouvelle position de la surface de séparation de l'eau et du mercure dans le tube DE.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

254. Mathématiques. — On donne un demi-cercle ACB, de rayon R ; sur la tangente AT perpendiculaire au diamètre AB, on porte AM tel que $AM = x$, puis, du point M, on mène la tangente MC. On demande :

1° De calculer en fonction de R et de x les distances du point C au diamètre et à la tangente ;

2° De déterminer x de manière que la somme de ces deux distances soit égale à une longueur donnée m, telle que $CD + AD = m$. — Discussion.

Au choix) : Mesure du temps ; jour solaire vrai ; jour solaire moyen.

2ᵉ *Sujet* : Lois de Kepler ; inégalité des saisons.

3ᵉ *Sujet* : Détermination de la longitude et de la latitude.

255. Physique. — Etant donné un aéromètre de Beaumé pour liquides plus denses que l'eau, on constate que si on vient à en augmenter le poids de 2 grammes en introduisant de la grenaille de plomb à son intérieur, il s'enfonce dans l'eau pure jusqu'à la division 15 de la tige.

Sachant qu'une dissolution de sel marin contenant 85 parties d'eau et 12 parties de sel a une densité de 1,114, on demande quels sont pour cet aéromètre : son volume jusqu'au zéro de la tige : le volume d'une division ; son poids initial.

Au choix) : 1ᵉʳ *Sujet* : Microscope.

2ᵉ *Sujet* : Lunette astronomique.

3ᵉ *Sujet* : Lunette de Galilée.

Dans ces trois sujets, il faudra construire les images, indiquer la marche des rayons, définir et mesurer la puissance.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES — SCIENCES)

256. Mathématiques. — Deux barres homogènes, de mêmes matières et de mêmes dimensions transversales AB, CD, peuvent tourner librement en leurs extrémités A et C autour de deux charnières horizontales I et J qui traversent une tige AC.

On sait que ce système pesant est en équilibre dans un même

plan vertical lorsque les barres AB, CD horizontales sont réunies par la tige AC verticale et par un fil F′ vertical et que la barre AB est supportée par un fil F dont la droite prolonge celle du fil F′, en rasant l'extrémité B de la barre AB.

On regarde le poids de la tige AC comme négligeable, et on demande de calculer :

1° Le rapport $\frac{CD}{AB}$ de la longueur des deux barres ;

2° La tension du fil F, la tension du fil F′ et la compression de la tige AC estimées en prenant comme unité de force le poids de la barre AB.

Au choix. a) Construire les intersections d'une droite donnée par ses projections et d'une sphère donnée par son rayon et par les projections de son centre.

b) Construire l'angle de deux plans donnés par leurs traces.

c) Construire l'angle de deux droites données par leurs projections.

257. Physique. — Entre deux conducteurs A, B supposés sans résistance sont disposés 3 groupes de 2 lampes à incandescence dont la résistance individuelle est de $1^{ohm},5$. Ces conducteurs sont reliés aux deux pôles d'une batterie de 4 éléments de pile dont la force électromotrice et la résistance individuelles sont respectivement $1^{volt},8$ et $0^{ohm},5$. Parmi les 3 arrangements rationnels de ces 4 éléments, en existe-t-il qui détermineront un courant plus intense ? Quelle sera alors la quantité de chaleur rayonnée par seconde dans chaque lampe ?

Au choix) 1er *Sujet* : Capacité électrique mesure, au moyen de l'électromètre de la capacité d'un condensateur.

2e *Sujet* : Effets calorifiques des courants. — Loi de Joule.

3e *Sujet* : Eclairage électrique.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

258. Arithmétique. — Deux robinets A et B sont ajustés à un réservoir. On ouvre A, on laisse couler le quart du liquide ; puis on ouvre B, et le réservoir achève de se vider par les deux robinets en 1 heure 1/4.

Si on avait d'abord laisser couler B pendant une demi-heure et

ensuite ouvert le robinet A, le réservoir aurait achevé de s'épuiser en 1 heure $\frac{1}{7}$, par les deux robinets.

Quel temps faudra-t-il à chaque robinet, coulant seul, pour mettre le réservoir à sec.

258 bis. — Calculer $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{75\,280}{\sqrt[5]{6\,543}}}}$.

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

259. Arithmétique. — Une personne avait placé une somme à 5 %. Elle l'a retirée au bout d'un an et du capital réuni aux intérêts elle a fait deux parts. Le tiers est employé à acheter de la rente 4,5 % au cours de 110, ce qui donne un intérêt annuel de 350 francs. Les deux tiers qui restent sont placés en rente 3 % et donnent 603 francs d'intérêt par an. On demande quelle somme cette personne avait d'abord placée et quel est le cours du 3 %.

259 bis. Algèbre. — Résoudre :

$$\log x + \log y = 2$$
$$x^2 - 7y^2 = 513.$$

259 ter. Calcul logarithmique (voir **258 bis**).

DEUXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

Sur la polaire d'un point par rapport à une conique, par A. Tissot. Librairie *Ch. Delagrave*, 15, rue Soufflot.

Les lecteurs de ce Journal se souviennent de l'étude qui fut insérée, *sur la polaire d'un point par rapport à une conique.* Cette étude avait pour but, principalement, de démontrer géométriquement des propriétés déjà connues sans doute, mais dont, la démonstration, véritablement élémentaire, n'avait pas encore été donnée ; en second lieu, d'établir quelques nouvelles propriétés. On se souvient quelle ingéniosité et quelle élégance M. Tissot a rencontrées dans son travail. Ce travail n'est évidemment pas classique et avant sa publication dans le *Journal de Mathématiques*, peu d'élèves avaient des notions exactes sur le *nœud* et le *saillant* ; mais il montre que fort heureusement pour notre pays et son enseignement, il y a encore des hommes qui aiment *la Mathéma-*

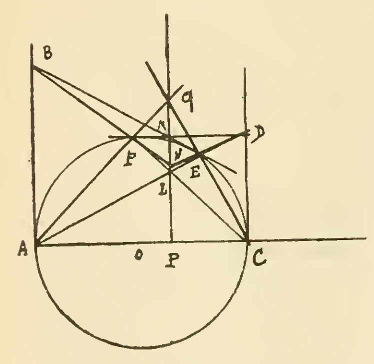
tique (comme diraient *Pascal* et M. *Laisant*) pour la Mathématique elle-même. M. Tissot est un de ceux-là. Il est bon qu'en dehors des heures d'enseignement, des professeurs, sans se préoccuper de l'esprit étroit de programmes, trop souvent mal faits, cherchent des méthodes, des idées nouvelles, dont eux ou leurs collègues meubleront l'esprit de leurs élèves. C'est cette recherche, quelquefois longue et toujours patiente, qui a permis, chez nous, d'élever le niveau des études scientifiques ; c'est le travail personnel de nos maîtres qui a soutenu la réputation de nos grandes écoles ; mais pour cela il faut des qualités intellectuelles d'un ordre supérieur, et la patience dans les recherches mathématiques ne suffit pas, c'est là surtout malgré, l'autorité de Buffon, que le *génie* n'est pas qu'une *longue patience*. A l'imagination, à l'initiative, à la hauteur de vues, à la déduction prompte et rapide, que doivent posséder tous les véritables mathématiciens, il faut joindre encore les qualités nécessaires pour coordonner tous ces faits, toutes ces vérités, pour les présenter sous leur vrai jour, à de jeunes cerveaux encore peu habitués à ces raisonnements, pour les *enseigner* enfin.

M Tissot possède à un haut degré toutes les qualités, et bien d'autres encore, que nous venons de signaler. Aussi engageons-nous les lecteurs de ce journal à relire attentivement le travail de ce maître ; ils y gagneront d'y voir leur esprit se développer, ainsi que la puissance de leur raisonnement.

G. M.

SOLUTION DE LA QUESTION 155

Aux extrémités du diamètre AC *d'un cercle* O, *on mène les tangentes* AB = v *et* CD = u, *et des points* B *et* D, *les autres tangentes* BE *et* DF *qui se coupent en* M ; *on tire ensuite les couples de droites* DE, BF ; CE, AF ; AE, CF, *qui se coupent respectivement en* N, Q *et* L.



Démontrer que les points M, N, Q *et* L *sont sur la polaire du point* I *de rencontre de* BD *avec* AC, *et que la droite* FE *passe par ce point.*

Déterminer les lieux décrits par les points M, N, Q *et* L *lorsque :*

$$\frac{AB}{CD} \quad \text{ou} \quad AB \times CD$$

ou AB ± CD sont constants.

1° On a $\dfrac{AI}{CI} = \dfrac{OI + R}{OI - R} = \dfrac{v}{u}$ d'où $OI = R\,\dfrac{v+u}{v-u}$.

P étant le pied de la polaire de I, on sait que $OP.OI = R^2$, et par suite,

$$OP = R\,\frac{v-u}{v+u}.$$

Soient 2α et 2β les angles CDF et ABE ; les triangles rectangles OCD et

OAB donneront :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{u} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{R}{v} \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2Ru}{u^2 - R^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2Rv}{v^2 - R^2}.$$

Les coordonnées rectangulaires de E (x', y') et de $F(x'', y'')$ par rapport à OI comme axe des x et à l'origine O sont donc :

$$\begin{cases} x' = R \cos 2\beta = R\dfrac{v^2 - R^2}{v^2 + R^2} \\ y' = R \sin 2\beta = \dfrac{2R^2 v}{v^2 + R^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = -R \cos 2\alpha = -R\dfrac{u^2 - R^2}{u^2 + R^2} \\ y'' = R \sin 2\alpha = \dfrac{2R^2 u}{u^2 + R^2} \end{cases}$$

A l'aide de ces coordonnées, il est facile de vérifier que les quatre points M, N, Q et L sont sur la polaire $x = R\dfrac{v - u}{v + u}$ et que les coordonnées de ces points sont :

$$(1) \quad MP = \frac{uv + R^2}{v + u} \quad NP = \frac{uv(3R^2 - uv)}{R^2(u + v)} \quad QP = \frac{2vu}{v + u} \quad LP = \frac{2R^2}{v + u}.$$

Incidemment, on voit que M est le milieu de QL et centre du cercle circonscrit au quadrilatère QFLE.

Observation. — Si u et v sont de sens contraires, le pôle I devient intérieur, et la polaire, extérieure.

2° Lieux géométriques. — *Première condition* : $\dfrac{v}{u} = m$.

Puisque $\dfrac{v}{u}$ est constant, BD coupe AC en un point fixe I, et comme OP est aussi constant, les points M, N, Q et L parcourent la polaire de ce point.

Deuxième condition : — $uv = m^2$.

Les équations des lieux géométriques cherchés résulteront de l'élimination des variables u et v entre

$$x = \frac{R(v - u)}{v + u} \qquad uv = m^2,$$

et l'expression (1) de l'ordonnée correspondante. On trouvera ainsi pour

(M) l'ellipse $4m^2R^2y^2 + (m^2 + R^2)^2x^2 = R^2(m^2 + R^2)^2$,

(N) l'ellipse $4R^6y^2 + m^2(3R^2 - m^2)^2x^2 = m^2R^2(3R^2 - m^2)^2$,

(Q) l'ellipse $R^2y^2 + m^2x^2 = m^2R^2$,

(L) l'ellipse $m^2y^2 + R^2x^2 = R^4$.

Troisième condition : $v + u = m$. — On éliminera u et v entre :

$$x = \frac{R(v - u)}{v + u} \qquad v + u = m,$$

et l'une des équations (1), ce qui donnera pour :

(M) la parabole $4R^2my = 4R^4 + m^2(R^2 - x^2)$,

(N) le lieu $16R^6y = m(R^2 - x^2)\left[12R^4 - m^2(R^2 - x^2)\right]$,

(Q) la parabole $2R^2y = m(R^2 - x^2)$,

(L) la parallèle à OI $y = \dfrac{2R^2}{m}$.

Quatrième condition : $v - u = m$. — On éliminera u et v entre :

$$x = \frac{R(v - u)}{v + u} \qquad v - u = m,$$

et l'une des équations (1), ce qui conduira pour :

(M) à l'hyperbole $4Rmxy + (m^2 - 4R^2)x^2 = m^2R^2$

(N) au lieu $16R^3x^3y = m(R^2 - x^2)\left[12R^2x^2 - m^2(R^2 - x^2)\right]$,

(Q) à l'hyperbole $2Rxy + mx^2 = mR^2$,

(L) à la droite $y = \frac{2R}{m}x$.

H. Lecocq.

SOLUTION DE LA QUESTION 236

Dans un cercle de rayon R, *placer trois cordes de longueurs données* α, β, γ *de manière à ce que le triangle formé par leurs intersections soit semblable à un triangle donné ayant* $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, *pour angles. Expression des côtés, de la surface et du rayon du cercle circonscrit. Cas particulier du triangle équilatéral.*

Posons $m = \sqrt{R^2 - \frac{\alpha^2}{4}}$ $n = \sqrt{R^2 - \frac{\beta^2}{4}}$ $p = \sqrt{R^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

m, n, p étant les distances du centre O aux cordes données.

Décrivons de ce point trois circonférences concentriques de rayons m, n et p. Menons une tangente quelconque BC à la première, et aux deux autres des tangentes faisant avec cette droite des angles donnés $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$, on obtiendra ainsi un triangle ABC répondant à la question.

Soient H, K, L les trois points de contact des côtés BC, AC, AB, on aura, par projections :

$$AK = AL \cos A + p \sin A$$
$$AL = AK \cos A + n \sin A$$

d'où

$$AK = \frac{p + n \cos A}{\sin A} \qquad AL = \frac{n + p \cos A}{\sin A},$$

on trouverait de même les expressions de BL, BH et de CH, CK d'où, pour les trois côtés a, b, c du triangle ABC, en posant :

$$m \sin A + n \sin B + p \sin C = Q$$

$$a = \frac{Q}{\sin B \sin C} \qquad b = \frac{Q}{\sin A \sin C}, \qquad c = \frac{Q}{\sin A \sin B},$$

$$S = \frac{Q^2}{2 \sin A \sin B \sin C} \qquad R = \frac{Q}{2 \sin A \sin B \sin C}.$$

Si le triangle est équilatéral, on a :

$$a = b = c = \frac{2(m + n + p)\sqrt{3}}{3},$$

$$S = \frac{(m + n + p)^2\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad R = \frac{2(m + n + p)}{3}.$$

H. Lecocq.

SOLUTION DE LA QUESTION 237

Déterminer, dans le plan d'un triangle ABC, *un point* O *tel que, pour les trois triangles* OAB, OAC, OBC, *le produit des trois côtés soit le même.*

On supposera, dans la figure, $a > b > c$.

Il faut donc que :

$$a \times OB \times OC = b \times OC \times OA = c \times OA \times OB$$

d'où
$$\frac{OA}{a} = \frac{OB}{b} = \frac{OC}{c}.$$

Soient D et D' les points de partage de BC en raison inverse de AC et AB : le point O sera sur la circonférence de diamètre DD', et son centre I peut être déterminé par les rapports :

$$\frac{DB}{b} = \frac{DC}{c} = \frac{a}{b+c} \qquad \frac{D'B}{b} = \frac{D'C}{c} = \frac{a}{b-c},$$

d'où
$$\frac{IC}{IB} = \frac{c^2}{b^2} \quad \text{et} \quad ID = \frac{abc}{b^2 - c^2}.$$

Pareillement, on trouvera sur AC et AB les centres H et K de deux autres cercles, de rayons $\frac{abc}{a^2 - c^2}$ et $\frac{abc}{a^2 - b^2}$ sur lesquels se trouvera encore le point O.

Il y a deux solutions symétriques par rapport à la droite IHK.

Etant donné un triangle ABC, *le point* O *symétrique du point de concours* I *des trois hauteurs par rapport au centre du cercle circonscrit est tel que, pour les trois triangles* OAB, OAC, OBC, *la somme des carrés des trois côtés est la même.*

En effet, abaissons OP et IQ perpendiculaires sur AC, on aura :

$$AP = CQ \quad \text{et} \quad AQ = CP.$$

D'autre part :

$$\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{CQ}^2 - \overline{AQ}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2$$

d'où
$$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CB}^2$$

et, par suite
$$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{OB}^2$$

H. Lecocq.

TROISIÈME PARTIE

QUESTION 760

Solution, par **Ernest Foucart**

Etant donné un cercle C, *de rayon* R, *d'un point* A *de la circonférence comme centre on décrit un cercle* C' *de rayon* R' *qui rencontre* C *en* P *et* P', *et un cercle* C'' *de rayon* R'' *qui rencontre* C *en* Q *et* Q'. *Calculer les aires des triangles* APQ *et* APQ' *en fonction de* R, R', R''.

E. N. Barisien.

Nous supposons $R'' > R'$. Le théorème de Ptolémée donne

$$2R.PQ = R''\sqrt{4R^2 - R'^2} - R'\sqrt{4R^2 - R''^2},$$

Or
$$S.APQ = \frac{R'R''.PQ}{4R} = \frac{R''\sqrt{4R^2 - R'^2} - R'\sqrt{4R^2 - R''^2}}{8R^2}.$$

De même

$$S.APQ' = \frac{R'.R''.PQ'}{4R} = \frac{R''\sqrt{4R^2 - R'^2} + R'\sqrt{4R^2 - R''^2}}{8R^2}.$$

Solutions exactes : MM. **Francis Dauzats, L'Huillier, Goyens, Plakhowo.**

QUESTION 762

762. — *Un angle droit* xOy *est coupé par deux droites parallèles* AA' *et* BB'. (A, B *sont sur* Ox ; A', B' *sur* Oy). *La perpendiculaire abaissée de* O *sur la direction des parallèles considérées rencontre :* AA' *en* P ; BB' *en* Q ; *on suppose* B'Q = AO.

Démontrer que si l'on prend, sur Ox, OH = QB, *on a*

$$\text{tg HA'O} = \text{tg}^3\text{AA'O}.$$ **E.-N. Barisien.**

$$OH = A'O \text{ tg HA'O}; \quad AO = A'O \text{ tg AA'O}.$$

Multiplions ces égalités membre à membre, nous aurons

$$AO.OH = A'O^2\text{tg HA'O. tg AA'O},$$

d'où

$$\text{tg HA'O} = \frac{AO.OH}{A'O^2\text{tg A'O}}.$$

Mais comme OB' = A'O et OB = HO, cela veut dire que

$$OQ^2 = BQ.OB' = A'O.AH; \quad QO = QB'.\text{ tg AA'O},$$

et

$$QO^2 = QB'^2\text{tg}^2\text{AA'O},$$

et alors nous aurons

$$\text{tg HA'O} = \frac{AO^2.\text{tg AA'O}}{A'O^2},$$

$$\frac{A'O}{AO} = \text{tang AA'O}; \quad \text{tg HA'O} = \text{tg}^3\text{AA'O},$$

ce qu'il fallait démontrer. **N. Plakhowo.**

Solutions exactes : MM. **Ernest Foucart, Francis Dauzats, A. Droz-Farny, Svecknicoff, L. Goyens, L'Huillier.**

SOLUTION DE LA QUESTION 763

Le centre du cercle orthogonal aux trois cercles exinscrits à un triangle F *est distant du centre du cercle des neuf points du même triangle* F *de la longueur* $\frac{1}{2}\sqrt{R(R-2r)}$. (**E.-N. Barisien**).

On sait que le cercle circonscrit au triangle anticomplémentaire de F est orthogonal aux trois cercles exinscrits ; il a pour centre l'orthocentre H de F. La distance de l'orthocentre de F au centre O du cercle circonscrit au même triangle est donnée par la relation connue

$$OH = \sqrt{R(R-2r)}.$$

Le centre ω du cercle des neuf points étant le milieu de la droite OH, on a la distance cherchée

$$\omega H = \frac{1}{2}\sqrt{R(R-2r)}.$$

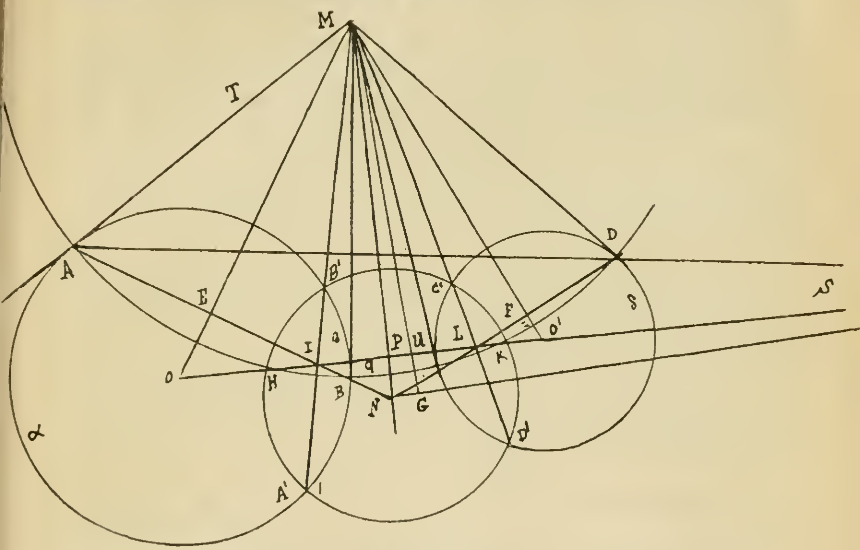
(**Jorge F. d'Avillez.**

Solutions exactes : **L'Huillier, A. Droz-Farny, Francis Dauzats.**

Si d'un point quelconque M *de l'axe radical de deux cercles* O *et* O', *on mène les quatre tangentes égales* MA, MB, MC, MD, *le point de rencontre des diagonales du quadrilatère inscrit* ABCD *coïncide, quel que soit le point* M *avec le centre* U *d'homothétie interne (si* O *et* O' *sont extérieurs l'un à l'autre), ou externe (si* O *et* O' *sont intérieurs l'un à l'autre).*

Soient O et O' extérieurs l'un à l'autre.

Remarquons d'abord que les côtés AD et BC passent par le centre d'homothétie externe S de O et de O'; car A et D d'une part, ou B et C d'autre



part, sont les points de contact de cercles tangents à O et O' intérieurement ou extérieurement, à cause des triangles isocèles AMD et BMC.

Les côtés AB et CD passent par les deux points fixes I et L qui sont, pour O et O' les pôles de l'axe radical; leur point de rencontre N appartient au même axe, puisque :

$$NA \times NB = ND \times NC.$$

Soient Q le milieu de $OO' = 2d$; R et R' les rayons de O et O'; T l'expression commune des tangentes menées de M; t, celle des tangentes menées de N et θ, celle des tangentes menées de P : posons $MP = m$, $NP = n$. On a d'abord :

$$\overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2 = OO' \times 2PQ = 4d \times PQ = R^2 - R'^2$$

d'où

$$PQ = \frac{R^2 - R'^2}{4d}$$

d'ailleurs :

$$OI = \frac{R^2}{PO} \qquad O'L = \frac{R'^2}{O'P} \qquad \theta^2 = PI \times PO = PL \times PO'.$$

D'un autre côté, des triangles semblables MPO et NPI, on déduit :

$$\frac{m}{\mathrm{PI}} = \frac{\mathrm{PO}}{n} \qquad \text{d'où} \qquad mn = \mathrm{PI} \times \mathrm{PO} = \theta^2.$$

Il en résulte :

$$\mathrm{T}^2 = \mathrm{ME} \times \mathrm{MO} = \mathrm{MP} \times \mathrm{MN} = m(m+n) = m^2 + \theta^2$$

$$t^2 = \mathrm{NA} \times \mathrm{NB} = \overline{\mathrm{NO}}^2 - \mathrm{R}^2 = n^2 + \overline{\mathrm{PO}}^2 - \mathrm{R} = n^2 + \theta^2 =$$
$$= n(m+n) = \mathrm{NP} \times \mathrm{NM}.$$

Si donc on prend PH = PK = θ, les deux circonférences de centres M, N et de rayons T, t passent par les deux points fixes H et K et sont orthogonales.

Du centre M du cercle circonscrit au quadrilatère ABCD, abaissons MG perpendiculaire à la troisième diagonale NS qui est la polaire du point de rencontre des diagonales intérieures. Soit U l'intersection de MG avec OO′; on a :

$$\mathrm{MU} \times \mathrm{MG} = \mathrm{MP} \times \mathrm{MN} = \mathrm{T}^2$$

donc U est le point de rencontre des diagonales.

Or, je dis que U est aussi le centre d'homothétie interne de O et O′; en effet, on a, par la similitude de PUM et NPS :

$$\frac{\mathrm{PU}}{m} = \frac{n}{\mathrm{PS}} \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{PU} = \frac{\theta^2}{\mathrm{PS}}$$

et, si l'on désigne par α, β, γ, δ les intersections de O et O′ par la ligne des centres, on aura, en partant de :

$$\theta^2 = (d + \mathrm{PQ})^2 - \mathrm{R}^2$$

$$\theta^2 = \frac{\alpha\delta \times \beta\gamma \times \alpha\gamma \times \beta\delta}{16d^2} \qquad \mathrm{PS} = \frac{(\mathrm{R}+\mathrm{R}')\,\alpha\gamma \times \beta\delta}{4d(\mathrm{R}-\mathrm{R}')}$$

avec les données ci-dessus, et en se servant de :

$$\frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{O'S}}{\mathrm{R'}} = \frac{2d}{\mathrm{R}-\mathrm{R'}}$$

on vérifiera facilement que

$$\frac{\mathrm{UO}}{\mathrm{UO'}} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R'}}.$$

H. Lecocq.

Dans tout hexagone inscrit, les points de rencontre de chacun des côtés non consécutifs avec la diagonale qui joint les extrémités des côtés contigus, sont trois points en ligne droite.

Dans tout hexagone circonscrit, les droites qui joignent chacun des trois sommets non consécutifs au point de rencontre des côtés contigus à ceux qui les déterminent, se coupent en un même point.

Soit $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$ un hexagone circonscrit au cercle O, de rayon R, et, dans le même ordre, S_1 (entre O_1 et O_2), $S_2S_3S_4S_5S_6$ les points de contact, sommets de l'hexagone inscrit dans le même cercle.

Des sommets $O_1O_3O_5$ comme centres, avec O_1S_1, O_3S_3, O_5S_5 comme rayons, décrivons trois cercles dont les centres de similitude externe M(O_1 et O_3), N(O_3 et O_5), P(O_5 et O_1), sont en ligne droite, et qui ont pour centre radical le point O.

D'après le théorème précédent, les trois droites S_1S_2, S_6S_3 et O_1O_2 qui passe par le point de rencontre σ_2 des diagonales du quadrilatère $S_1S_2S_3S_6$ concourent au point M.

De même les trois droites S_3S_4, S_2S_5 et O_3O_5 qui passent par le point de rencontre σ_4 des diagonales du quadrilatère $S_3S_4S_5S_2$ concourent au point N.

Et enfin les trois droites S_6S_5, S_1S_4 et O_1O_5 qui passe par le point de rencontre σ_6 des diagonales du quadrilatère $S_5S_6S_1S_4$ concourent au point P.

La propriété est donc démontrée.

D'autre part, puisque $\sigma_2\sigma_4\sigma_6$ sont les centres de similitude interne des couples de cercles O_1O_3, O_3O_5 et O_5O_1, il en résulte que les points

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_4,\ \sigma_6 \text{ et } M\\ \sigma_2,\ \sigma_6 \text{ et } N\\ \sigma_2,\ \sigma_4 \text{ et } P\end{array}\right\} \text{ sont en ligne droite.}$$

Il en serait de même pour tes cercles $O_2O_4O_6$ qui fournissent une autre droite (centres de similitude externe), et pour les centres de similitude interne $\sigma_2\sigma_3\sigma_5$ considérés deux à deux.

La seconde partie se déduit de la première par les propriétés des pôles et polaires réciproques.

Du théorème précédent on conclut encore que O_1O_3 passe par σ_2, O_2O_4 par σ_3..., etc.

Et que chacune des trois lignes O_1O_4, O_2O_5, O_3O_6 passe par un des sommets du triangle déterminé par les trois droites S_1S_4, S_2S_5 et S_3S_6.

Remarque. — Les résultats formulés dans ce même théorème permettent de passer facilement du théorème de Pascal à celui de Brianchon et réciproquement, au moyen des figures inverses. En effet, considérons les cercles O_1, O_4 de rayons O_1S_1 et O_4S_4 ; les cordes de contact S_3S_4 et S_1S_6 concourent en un point α' de leur axe radical ; soit α l'intersection de $O\alpha'$ avec O_1O_4, on a :

$$O\alpha \times O\alpha' = R^2.$$

Les points correspondants β, β' ; γ, γ' relatifs aux droites O_2O_5 et O_3O_6 donneront de même

$$O\beta \times O\beta' = R^2$$
$$O\gamma \times O\gamma' = R^2.$$

Ainsi les points α, β, γ ont pour inverses α', β', γ' ; si donc ces derniers sont en ligne droite (théorème de Pascal), les droites O_1O_4, O_2O_5 et O_3O_6 concourent en un même point (théorème de Brianchon), et réciproquement.

H. Lecocq.

REMARQUES

Concernant les formules fondamentales de la trigonométrie

par M. **Escary**, professeur au Lycée de Foix

I

Les formules de l'addition des arcs en trigonométrie, savoir :

$$(1)\qquad \begin{cases}\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a\end{cases}$$

peuvent être établies par trois méthodes qui, en apparence, sont différentes, mais qui, au fond, découlent des mêmes principes comme cela doit être et

comme il est facile de le démontrer. Dans la première méthode, fondée sur la similitude, c'est-à-dire sur l'interprétation arithmétique des constructions de la géométrie, on établit d'abord pour le premier quadrant que ces deux formules sont de véritables identités, ou des égalités de même espèce que

$$(2) \qquad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

où les deux membres conduisent à des valeurs numériques égales pour toutes les valeurs réelles de a et de b.

Ce point établi, on applique les résultats obtenus dans les variations des lignes trigonométriques à celles de ces lignes qui figurent dans les égalités (1). On sait d'ailleurs que ces variations sont uniquement déduites de l'arithmétique et des conventions relatives aux signes de la géométrie de Descartes. On constate ainsi successivement, non seulement que les égalités dont il s'agit subsistent, mais encore qu'elles conservent la même forme, quand la somme des arcs se termine au second, au troisième ou au quatrième quadrant, et cela, quelles que soient les valeurs des arcs a et b dont la somme est comprise entre 0 et 2π. Enfin, en ayant égard à la périodicité, on démontre, toujours au moyen des mêmes variations des lignes trigonométriques, que les premiers membres des égalités (1) donnent les mêmes résultats numériques que les seconds, lorsque a, b, et par suite leur somme, passent d'une manière continue par toute l'échelle des grandeurs ; en sorte que, ces deux égalités uniquement composées de fonctions transcendantes sont absolument analogues, ou plutôt de même espèce que l'égalité (2) exclusivement composée de quantités algébriques.

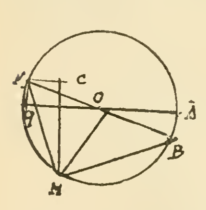
Telle est l'essence de la démonstration, due à Lagrange, si je ne me trompe, des formules fondamentales de la trigonométrie, qu'on trouve dans la plupart des traités écrits sur cette matière. On voit que cette solution a toute la généralité, ou toute l'étendue que la question comporte.

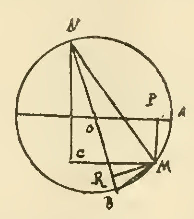
II

Les formules (1) qu'on peut déduire de la suivante :

$$(3) \qquad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

ont été établies par Cauchy, d'après Catalan, ou par Sarrus, d'après M. H. Fajon (*Journal de Vuibert*, 1892, p. 86), au moyen des mêmes principes et avec la même généralité, à l'aide d'une méthode dont l'exposition exige moins de détails et qui, par conséquent, conduit plus rapidement au but.





Soient les cercles O de rayons égaux à l'unité. ANM un arc égal à a, AN un arc égal à b, et par suite NM égal à $a - b$. Si l'on construit le sinus MP de l'arc a et le cosinus OR du même arc, le sinus NQ et le cosinus OQ de l'arc b, et enfin, le sinus MR et le cosinus OR de l'arc $a - b$, les deux triangles rectangles MNC et MNB

donnent, dans le premier cercle, l'égalité double suivante :

$$\overline{MN}^2 = (\sin a + \sin b)^2 + (\cos b - \cos a)^2 = 2\left[1 + \cos(a - b)\right]$$

et dans le second, la suivante :

$$\overline{MN}^2 = (\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 = 2\left[1 + \cos(a - b)\right].$$

D'où l'on conclut dans les deux cas, et en ayant égard aux signes de MP, ou de $\sin a$, de OP, ou de $\cos a$, de OQ ou de $\cos b$, de OR ou de $\cos(a - b)$.

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

ce qui est précisément la formule (3).

La construction des triangles BMN et CMN, au moyen desquels la formule (3) a été établie, est toujours possible et reste la même quand les extrémités des arcs a et b se terminent à l'un quelconque des quatre quadrants. Il suffit donc pour achever d'établir sa généralité d'avoir égard à la périodicité.

Ces deux solutions ne diffèrent donc pas essentiellement l'une de l'autre, cependant, la seconde est plus élégante parce que la discussion réclamée par la considération successive des quatre quadrants, s'y trouve supprimée. Elles emploient les mêmes éléments géométriques puisés aux mêmes sources, c'est-à-dire sans l'interprétation des constructions de la géométrie au moyen des opérations de l'arithmétique.

III

La méthode dite des projections est aujourd'hui la seule exigée par les programmes de l'enseignement secondaire en France pour établir les mêmes formules. Elle est considérée par les étudiants comme étant moins nette, moins limpide que les précédentes. Il nous semble que cela tient à ce que le point de départ de la démonstration qui en résulte et qu'on donne dans les Traités de trigonométrie est un peu éloigné des principes dont on y fait usage. Et ce n'est qu'en y portant une certaine attention qu'on voit comment, au moyen des raisonnements employés, et sans avoir égard aux démonstrations précédentes, les égalités (1) dont il s'agit, composées de fonctions transcendentes, sont des identités ou des égalités de même espèce que l'égalité algébrique (2).

En se reportant aux excellentes leçons de trigonométrie de Briot et Bouquet, on voit que ces deux auteurs font découler la démonstration des identités (1) de la considération d'un polygone plan (et il pourrait être gauche), analogue au polygone des forces de la statistique, et qui résulte de la composition d'un système de forces appliquées à un point matériel et ayant des directions quelconques. Ils considèrent en même temps le côté qui le ferme et qu'ils appellent la résultante. Ils imaginent ensuite que le polygone et la résultante sont parcourus par un mobile à partir de leur origine commune. Ce mobile part ainsi, dans l'un et dans l'autre cas, d'un même point pour aboutir à un même second point. Ils projettent ces deux chemins ainsi parcourus sur le même axe et ils concluent que les deux résultats sont identiques, ce qui est vrai. Mais la solution étant ainsi présentée à cette distance du point de départ de la statique et dans un ordre d'idées bien différent de celui qui fait l'objet de la trigonométrie, on ne voit

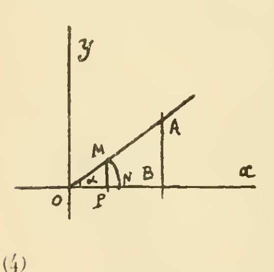
pas bien les raisons de cette identité et pour bien s'en rendre compte, il est nécessaire de remonter à ce même point de départ.

On sait que dans la statique les opérations au moyen desquelles on parvient à former des identités sont purement géométriques, et que c'est par des constructions géométriques qu'on est amené à faire effectuer à toutes les forces appliquées à un point, sauf à l'une quelconque d'entre elles, des translations convenables, ce qui conduit aux polygones dont nous venons de parler et aux côtés qui les ferment. Ces polygones et ces côtés constituent des quantités géométriques formant de véritables identités, c'est-à-dire des quantités pouvant être substituées les unes aux autres.

Maintenant, la traduction en langage algébrique de ces identités qui ont une forme géométrique, se trouve fondée sur la solution du problème inverse suivant : « Décomposer une force donnée en deux ou trois autres ayant des directions assignées à l'avance. » On peut prendre ces directions absolument quelconques à partir du point d'application de la force donnée, et par conséquent rectangulaires. En décomposant ainsi à l'aide du parallélogramme ou du parallélipipède des forces, toutes les forces appliquées au même point pris pour origine, ainsi que leur résultante, en deux ou trois autres ayant les directions données, on remplace l'identité géométrique dont nous venons de parler, par deux ou par trois autres identités ayant un sens arithmétique et absolument analogue à celles qui naissent de l'addition algébrique; car par cette décomposition, on est ramené à une nouvelle composition des forces qui coïncide avec l'addition algébrique. Dans les ouvrages de trigonométrie, on se borne à considérer la projection du polygone des forces et celle de la résultante sur un seul axe, et on égale la somme des projections des différents côtés à la projection de la résultante. Si la résultante est nulle, ou que le polygone se ferme, le second membre de l'identité est nul. Tels sont les principes dont on paraît faire implicitement usage dans les traités actuels de trigonométrie pour établir les formules (1).

IV

Mais la discussion précédente met sur la voie pour arriver aux mêmes formules à l'aide d'une méthode indépendante de la statique et uniquement fondée sur la définition donnée en géométrie plane, de la projection d'une droite sur une autre droite, rapprochée de l'arithmétique, de la variation des lignes trigonométriques, et enfin, de la multiplication algébrique.



Soient en effet deux axes rectangulaires $x'x$ et $y'y$, une droite OA, d'abord de longueur constante, mais absolument quelconque et sa projection OB sur Ox. On a l'identité purement arithmétique :

(4) $$\mathrm{OB} = \mathrm{OA} \times \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}.$$

(*A suivre*).

Le Directeur-gérant,
GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux candidats

I. — A L'ECOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

(*A cette époque de l'année beaucoup de nos abonnés nous demandent des questions pouvant être posées à l'oral; nous leur en donnons dans ce numéro, un certain nombre ayant été demandés plusieurs fois*).

260. — Trouver la somme des n premiers nombres entiers. Trouver la somme des carrés des n premiers nombres entiers.

Etudier les variations de la fonction :

$$y = \sin^2 x - \sin x + 1.$$

Couper une pyramide par un plan parallèle à la base de façon que le volume de la petite pyramide partielle soit le septième du volume du tronc de pyramide restant.

261. — Définition et calcul du volume du segment sphérique. On donne un triangle ABC, trouver un point M sur la base BC, tel que $\overline{MA}^2 = MB \times MC$. Examiner successivement le cas où le point M est extérieur au segment BC et le cas où le point M est intérieur au segment BC.

Résoudre l'équation : $\sin 3x = \cos x$.

262. — Construire en géométrie cotée l'angle d'une droite et d'un plan donnés par leurs échelles de pente.

Résoudre et construire un triangle, connaissant la longueur α d'une bissectrice et les longueurs l et m des segments qu'elle détermine sur le côté opposé.

On donne la projection $a\,b\,c\,d\,e$ d'un polygone plan et les cotes des trois sommets $a\,b\,c$, on demande les cotes des deux autres sommets $d\ e$.

263. — On donne sur une droite trois points A, B, C, construire le conjugué harmonique du point C par rapport aux points A et B.

On donne un triangle ABC, trouver un point S de l'espace d'où l'on voit les côtés AB, AC, CB, sous un angle droit. Nombre de solutions. Calculer les côtés SA, SB, SC du trièdre trirectangle ainsi obtenu.

264. — Mener à l'ellipse une tangente par un point donné.

Trouver parmi les pyramides à base carrée, ayant même arête a, celle dont le volume est maximum.

265. — Construire un tétraèdre régulier dont on donne trois sommets et le centre.

Résoudre le système : $x + y = a \quad \sin^2 x + \sin^2 y = b$.

266. — Résoudre un triangle connaissant $\log b$, $\log c$ et A.

Trouver une normale commune à deux cylindres de révolution. Incidemment : peut-on toujours mener à un cylindre un plan tangent parallèle à un plan donné?

On donne une sphère impénétrable et un point A sur cette sphère ; construire le point A′ diamétralement opposé au point A sur la sphère.

Dans un triangle ABC on donne la hauteur b issue du sommet A et les segments m et n que cette hauteur h détermine sur le côté BC, on demande de calculer l'angle A.

267. — Construire en géométrie cotée la perpendiculaire commune à deux droites.

Etudier la fonction : $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

On donne un triangle ABC; trouver à l'intérieur de ce triangle le point M tel que l'on ait :

$$\frac{\text{aire MBC}}{1} = \frac{\text{aire MAC}}{2} = \frac{\text{aire MAB}}{3}.$$

268. — En supposant $b^2 - ac < 0$, étudier le signe de l'expression $ax^2 + 2bx + c$, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Définition de la pyramide régulière. Par quelle longueur faut-il multiplier la surface latérale de la pyramide pour obtenir son volume?

On donne dans un triangle les côtés b, c et la surface $\frac{h^2}{2}$; calculer les autres éléments du triangle.

269. — Résoudre un triangle connaissant b,c,A. Calculer la surface.

Trouver l'angle de deux plans en géométrie cotée.

270. Physique. — Comment est constitué un galvanomètre? Comment l'aiguille est elle rendue astatique? Quelle est l'action de la bobine sur l'aiguille supérieure? Action de la partie supérieure de la bobine sur l'aiguille inférieure? Quelle est donc l'utilité de la seconde bobine introduite? Si les deux aiguilles

étaient également aimantées qu'arriverait-il? Pourrait-on mesurer l'intensité du courant avec un tel appareil? A quoi pourrait servir l'appareil ?

Qu'entend-on par projection stéréographique? Quels sont les grands avantages de la projection stéréographique? Montrer qu'elle conserve les angles.

271. — Qu'entend-on par électrolyse? Quelles sont les lois de l'électrolyse? Comment se fait la décomposition des sels de cuivre? Principe de la galvanoplastie.

Parler du phosphore. — Quelles sont les propriétés de ce corps? Où le trouve-t-on? A quoi emploie-t-on le phosphore?

272. — Parler de la lunette astronomique. Qu'appelle-t-on foyer d'une lentille? Ecrire la marche des rayons dans la lunette astronomique. Qu'entend-on par champ d'une lunette astronomique? Conserve-t-on dans la lunette tout le champ susceptible d'avoir? Dans ce champ, toutes les parties de l'image sont-elles également éclairées? Examiner l'image au point de vue de son éclairement, d'un point situé sur le bord du champ.

273. — Lecture d'une carte d'Etat-Major.

274. — Quelles sont les lois de la chute des corps? Calculer le temps que met un corps en tombant d'une hauteur h. Quelle sera la vitesse acquise par ce corps, au bas de sa chute? Supposons qu'à ce moment le corps rencontre la surface d'une masse d'eau, combien mettra-t-il à parcourir une longueur l dans cette masse, en supposant la résistance de l'eau nulle?

Qu'est-ce que l'ammoniaque? D'où retire-t-on industriellement ce gaz? Que donnent comme résidu les eaux d'épuration?

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

275. Mathématiques. — Le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles à un plan est égal à la somme des moments des composantes. Démontrer le théorème pour les moments de deux forces parallèles et de leur résultante par rapport à un point de leur plan.

Citer les diverses expressions de l'aire d'un triangle en trigonométrie. Démontrer que $S = \frac{a^2 \sin B \sin B}{2 \sin A}$.

Résoudre le système : $\begin{cases} x + y + xy = a \\ x^2 + y^2 - (x + y) = b. \end{cases}$

276. — Définir l'axe radical de deux circonférences. Démontrer que le lieu des points d'égale distance par rapport à deux circonférences est bien une droite.

On donne une droite par ses deux projections ; trouver les angles qu'elles font avec les plans de projection.

Caractère de divisibilité d'un nombre par 9.

Calculer tg $2a$ connaissant tg a. — x' et x'' étant les racines de $x^2 + px + q = 0$ former une équation qui admette pour racines $(x' + x'')^2$ et $(x' - x'')^2$.

277. — Parler des éléments qui servent de base au système métrique. Quelle différence essentielle existe entre les mesures de volume et les mesures de capacité ?

Calculer sin a et cos a connaissant tg $\frac{a}{2}$.

Trouver une progression arithmétique de 4 termes connaissant la somme de ces termes et celle de leurs inverses.

278. — Réduction de plusieurs fractions au même dénominateur. Obtenir le plus petit numérateur commun.

Calculer sin $2a$ connaissant sin a et cos b.

Construire la courbe : $y = \frac{x^3}{1 - x}$.

279. — Définir le centre de gravité d'une aire plane. Indiquer un procédé pour trouver le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque. En quoi consiste le théorème des moments ? Détermination du centre de gravité au moyen de ce théorème.

Etablir, entre les éléments d'un triangle, la relation :

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

Utiliser le théorème des projections pour obtenir une formule générale. Quelle formule obtiendrait-on en projetant le contour du triangle sur un axe faisant un angle α avec l'un des côtés ? —

Résoudre le système : $\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$

280. Chimie. — Pourquoi a-t-on mis le soufre et l'oxygène dans la même famille des métalloïdes ? Sulfocarbonates.

281. — Anhydride azotique. Sa préparation. Propriétés.

Acide bromhydrique. Préparation. Comment peut-on recueillir le gaz bromhydrique sec? Peut-on le dessécher avec de l'acide sulfurique? Peut-on préparer l'acide bromhydrique par l'action du brome sur certaines matières organiques chauffées? Propriétés de l'acide bromhydrique. — Sulfure de carbone. Préparation. Usages.

282. — Hydrogène. Préparation de l'hydrogène. Méthode générale; décomposition de l'eau par un métal facilement oxydable. — Attaque d'un métal par de l'acide étendu. Action de l'acide chlorhydrique sur le zinc. Impuretés. Purification.

Iode. Préparation. Propriétés. Action de l'iode sur les dissolutions alcalines.

Chlorure de silicium. Préparation. Propriétés du chlorure de silicium. Son action sur l'eau. Est-ce un corps solide, liquide ou gazeux? Action du chlorure de silicium sur l'alcool. Action de l'hydrogène sur le tétrachlorure de silicium.

283. — Bioxyde d'azote. Préparation. Propriétés. Est ce un composé stable? — Acide chlorydrique. Préparation. Quelle est la préparation industrielle? Quels sont les appareils dans lesquels s'effectue la réaction? Comment se forme le sulfate neutre et dans quelles conditions? Propriétés de l'acide chlorydrique.

Bore et acide borique. Préparation. D'où provient le borate de chaux? Quelle est la formule de l'acide borique? Préparation du borax. Comment peut-on passer de l'acide borique au biborate de soude?

284. — Synthèse de l'eau. Eudiomètre. Autres méthodes.

Hydrosulfite et hyposulfite de sodium. Préparation de l'hydrosulfite de sodium. Comment peut-on séparer l'hydrosulfite du sulfite et du bisulfite qui se forment en même temps? Comment peut-on distinguer l'hydrosulfite du bisulfite? Propriétés de l'hyposulfite et ses usages? Que donne-t-il traité par un acide? — Hydrogène arsenié. Préparation. Action de l'hydrogène sur l'anhydride arsénieux. Comment distingue-t-on les taches d'arsenic des autres taches métalliques?

285. — Sulfure de carbone. Préparation du sulfure de carbone. Analogies du sulfure de carbone et de l'acide carbonique. Sulfo-carbonates.

286. Physique. — Loi de Mariotte. Enoncé de la loi. Véri-

fication. Cette loi est-elle exacte? Les gaz s'en écartent-ils beaucoup? Dans quel sens s'en écartent-ils? Y a-t-il beaucoup de gaz qui se compriment moins que ne l'indique la loi de Mariotte?

Lunette de Galilée. Marche des rayons dans l'appareil. Quels sont les avantages de la lunette de Galilée?

287. — Hygrométrie. Qu'appelle-t-on état hygrométrique? Peut on trouver l'état hygrométrique si on connaît la tension de la vapeur d'eau et l'humidité de l'air? Comment peut-on mesurer l'état hygrométrique? Hygromètre de condensation? Hygromètre d'Alluard. Est-ce un hygromètre très précis?

Qu'entend-on par électrisation par influence? Dans quel cas la quantité d'électricité qui se développe sur le corps influencé est-elle égale à la quantité d'électricité contenue sur le corps influançant? Cylindre de Faraday.

288. — Aérostat. Théorie de l'aérostat en négligeant le volume des accessoires. En supposant l'aérostat plein et fermé, calculer le moment où le ballon s'arrêtera? Pourra-t-on calculer *à priori* la hauteur que l'on pourra atteindre? L'aérostat est-il d'ordinaire fermé? — Microscope composé. Description de l'appareil. Construction de l'image d'un objet. Marches des rayons. L'oculaire se trouve-t-il au gros bout ou au petit bout? Mesure du grossissement.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

289. Mathématiques. — 1er *sujet* : Tout déplacement d'une figure plane de forme invariable, dans son plan, se ramène à une rotation ou à une translation.

2e *sujet* : Inscription dans un cercle du décagone régulier.

3e *sujet* : Mesure de la surface d'un rectangle.

Obligatoire : Deux forces P et Q appliquées à un corps solide font entre elles un angle α. Trouver leur résultante R et les angles que fait sa direction avec celle des deux forces données : (application) $P = 12^{kg},235$; $Q = 2^{kg},649$; $\alpha = 75°31'5''$.

290. Physique. — 1er *sujet* : Définition de la déclinaison et de l'inclinaison.

2e *sujet* : Courants thermo-électriques.

3e *sujet* : Induction électrique. Expériences fondamentales.

Obligatoire : Un corps est lancé verticalement dans le vide et de haut en bas, avec une vitesse égale à 20 mètres par seconde. Au bout de quel temps sa vitesse sera-t-elle devenue égale à 40 mètres ? Quel espace aura-t-il parcouru alors ?

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES-SCIENCES)

291. Mathématiques. — 1er *sujet* : Théorie de la balance de Quintenz.

2e *sujet* : Une figure plane qui ne sort pas de son plan peut passer de l'une de ses positions donnée à une rotation exécutée autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure et convenablement choisi (le démontrer).

3e *sujet* : Qu'est-ce que le jour solaire vrai ? Qu'est-ce que le jour solaire moyen ? Expliquer leurs définitions.

Obligatoire : Un point situé dans le point vertical de projection est défini par ses projections m, m'. On demande de représenter une droite qui, passant par ce point, fera respectivement avec le plan horizontal et le plan vertical des angles donnés α et β (xy est la ligne de terre).

292. Physique. — 1er *sujet* : Poids spécifique des solides et des liquides.

2e *sujet* : Notions expérimentales du potentiel et de la capacité *électro-statique*.

3e *sujet* : Densité des gaz.

Obligatoire : Une bille roule sur un plan parfaitement poli et suivant la ligne de pente de ce plan. Le plan est incliné de 45° sur l'horizon. Calculer l'accélération du mouvement de la bille connaissant l'accélération g des corps pesants en chute libre ($g = 9{,}809$).

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

293. Arithmétique. — Partager 12051 francs entre trois personnes âgées l'une de 32 ans, la seconde de 25 ans et la troi-

sième de 16 ans, de manière que leurs parts soient inversement proportionnelles à leurs âges.

Calculer $x = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{7528}{6992}} + \sqrt{\dfrac{7531}{7842}}}$.

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

294. Algèbre. — Résoudre le système :

$$\begin{cases} -3x + 8y + 6z^3 = 0 \\ -x - 2y^2 + 12z^3 = -4 \\ -2x + 6y^2 - 3z^2 = -5. \end{cases}$$

295. Arithmétique. — Trois ouvriers A, B, C ont un ouvrage à faire, A et B ensemble pendant quatre jours feraient les $\frac{2}{3}$ de l'ouvrage. — B et C, ensemble pendant huit jours, feraient les $\frac{14}{15}$. A et C pendant cinq jours feraient ensemble les $\frac{3}{4}$.

On occupe A seul pendant deux jours, B seul pendant six jours. Combien C seul mettra-t-il à terminer l'ouvrage?

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE SAINT-CYR
(CONCOURS DE 1898)

I. — *Déterminer les deux bases d'un trapèze rectangle connaissant sa hauteur* h, *sa surface* $\frac{1}{2}$ hm *et le produit* k^2 *de ses deux diagonales. — Discuter.*

Soit ABCD le trapèze dont les angles droits sont en A et D. Désignons les bases AB et CD par x et y, et la surface du trapèze par S. On a $\frac{1}{2} hm = S$ et, par conséquent (1) $x + y = m$.

D'autre part, $AC.BD = k^2$,

ou $\sqrt{h^2 + y^2} . \sqrt{h^2 + x^2} = k^2$,

ou, élevant au carré (2) $x^2y^2 + h^2(x^2 + y^2) + h^4 = k^4$.

Nous avons donc à résoudre les équations (1) et (2). Or

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = m^2 - 2xy,$$

de sorte que (2) donne l'équation suivante en (xy)

$$x^2y^2 - 2h^2xy + h^2m^2 - k^4 + h^4 = 0.$$

D'où (2) $xy = h^2 \pm \sqrt{k^4 - h^2m^2}$.

On est donc ramené au problème connu de trouver deux longueurs x et y, connaissant leur somme (1) et leur produit (2).

L'équation qui donne à la fois x et y est

$$X^2 - mX + h^2 \pm \sqrt{k^4 - h^2m^2}.$$

D'où (3)

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4h^2 \pm 4\sqrt{k^4 - h^2m^2}}}{2}.$$

Le problème semble comporter quatre solutions : il n'en a en réalité que deux, par suite de la symétrie des variables x et y.

La discussion provient du signe de chacun des radicaux de (3). Elle est donc des plus faciles.

La condition de réalité du petit radical est

$$k^4 > h^2m^2, \quad \text{ou} \quad k^2 > 2S.$$

Celle du grand radical est $4\sqrt{k^4 - h^2m^2} < m^2 - 4h^2$,

ou $$16(k^4 - h^2m^2) < (m^2 - 4h^2)^2,$$

qui revient à $16k^4 < (m^2 - 4h^2)^2 + 16h^2m^2, \quad 16k^4 < (m^2 + 4h^2)^2,$

ou $$4k^2 < m^2 + 4h^2,$$

et $$k^2 < \frac{m^2}{4} + h^2.$$

Voici maintenant sous forme de tableau, le détail de la discussion. — Remarquons d'abord que si l'une des valeurs x et y est négative, les points B et C se trouvent alors de part et d'autre de la hauteur AD et le trapèze ABCD est alors un *trapèze de seconde espèce*.

1° $k^4 < h^2m^2$ $k^2 < 2S$	. . . .	2 trapèzes imaginaires.
2° $k^4 > h^2m^2$ $k^2 > 2S$	a) $h^4 > k^4 - h^2m^2 \quad k^4 < h^4 + h^2m^2$.	2 trapèzes de 1re espèce.
	b) $h^4 < k^4 - h^2m^2 \quad k^4 > h^4 + h^2m^2$.	1 trapèze de 1re espèce. 1 trapèze de 2e espèce.
	c) $h^4 = k^4 - h^2m^2 \quad k^4 = h^4 + h^2m^2$.	1 trapèze (*) et 1 trapèze réduit à un triangle.
3° $k^4 = h^2m^2$ $k^2 = 2S$	a) $m < 2h$	1 trapèze imaginaire.
	b) $m = 2h$	1 carré.
	c) $m > 2h$	1 trapèze réel.
4° $k^2 > \frac{m^2}{4} + h^2$	. . . .	2 trapèzes imaginaires.
5° $k^2 < \frac{m^2}{4} + h^2$	. . . .	2 trapèzes réels. (dans les mêmes conditions que dans 2°).
6° $k^2 = \frac{m^2}{4} + h^2$	. . . . . .	1 carré et un trapèze réduit à 1 triangle.

II. — *On donne deux droites de l'espace, AX et BY orthogonales entre elles et ayant AB pour perpendiculaire commune. On prend sur AX une longueur variable AM et sur BY une longueur BN égale à AM.*

1° *Démontrer que la sphère qui a MN pour diamètre passe par les points A et B.*

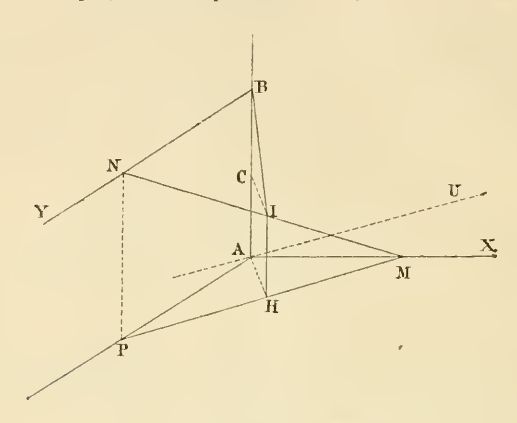
(*) Ce trapèze sera réel si $m > 2h\sqrt{2}$, imaginaire si $m < 2h\sqrt{2}$, et un carré si $m = 2h\sqrt{2}$.

2° *Trouver le lieu du centre de cette sphère.*

3° *Démontrer que le plan tangent en A à cette sphère passe toujours par une certaine droite fixe.*

4° *Démontrer que la droite MN reste parallèle à un certain plan fixe.*

1° Soient : P la projection du point N sur le plan mené par AX parallèlement à BY, C le milieu de AB, I le milieu de MN, H la projection de I sur PM. Il en résulte que $IH = \frac{NP}{2} = \frac{AB}{2} = AC$. Le triangle AIB est donc isoscèle ; et IA = IB. Il reste à démontrer que IB = IM = IN.



Posons AB = d et AM = BN = x. Le triangle rectangle MPN donne

$$\overline{MN}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{PM}^2 = d^2 + (\overline{AM}^2 + \overline{AP}^2) = d^2 + 2x^2,$$

et

$$(1) \qquad \overline{IM}^2 = \frac{\overline{MN}^2}{4} = \frac{d^2}{4} + \frac{x^2}{2}.$$

D'autre part, le triangle rectangle ICB donne

$$\overline{IB}^2 = \overline{IC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CB}^2 = (\overline{AM}^2 + \overline{HM}^2) + \overline{CB}^2,$$

$$(2) \qquad \overline{IB}^2 = x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{d^2}{4} = \frac{x^2}{2} + \frac{d^2}{4}.$$

En composant (1) et (2), on a bien IM = IB.

2° Le point I, centre de la sphère ABMN, est toujours situé dans le plan fixe mené par le milieu C de AB perpendiculairement à AB, et dans ce plan le lieu est une droite.

3° Le plan tangent en A coupe le plan APM, suivant la droite AU perpendiculaire à AH. Cette droite est fixe, puisqu'elle est la bissectrice extérieure de l'angle MAP.

4° Le plan MNP est toujours parallèle au plan ABU : la droite MN située dans ce plan est donc toujours parallèle au plan fixe ABU.

E.-N. Barisien.

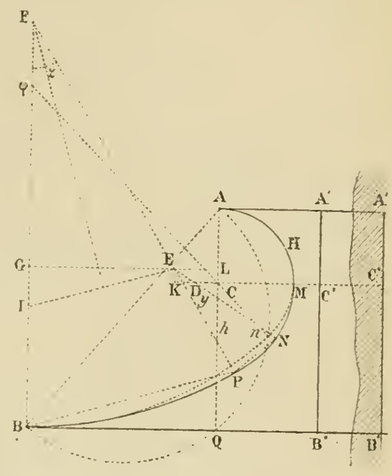
TROISIÈME PARTIE

DE LA SCOTIE OU DE L'ARC RAMPANT

Ces courbes servent, en architecture, à raccorder deux horizontales ou deux verticales. Elles sont à deux ou à plusieurs centres.

1° Scotie à quatre centres. Construction (A. Tronquoy, dessin linéaire géométrique, 1re partie, 1878, Delagrave).

« Soient données les parallèles AA′ et BB′. Des points A et B et d'un « troisième A′ pris à volonté, menez les perpendiculaires AC, BF et A′B′ ; « divisez A′B′ en trois parties « égales, et menez C′C parallèle à A′A ; du point C avec « un rayon CA décrivez l'arc « AM ; divisez CM en trois « parties égales et portez de C « en D le tiers de CM ; puis, du « point D, avec la distance DM « décrivez l'arc indéfini MN ; « prenez la corde de la moitié « de l'arc AM et portez cette « longueur de M en N ; alors « joignez ND et divisez cette « ligne en quatre parties égales ; portez l'un des quarts « de D en E et de ce point « comme centre décrivez l'arc « NP ; portez ensuite EN de B « en I et tracez IE ; enfin élevez « sur le milieu de IE une perpendiculaire dont l'intersection avec BF donnera le centre F de l'arc PB « qui terminera la scotie ».



La scotie ainsi déterminée dépend de deux éléments linéaires, savoir de A′B′ ou AQ = h distance des horizontales, et de BQ = a.

Les trois premiers centres C, D, E et les rayons CA, DM, EN ne dépendent que de h, et l'on a, en posant : $\widehat{NDM} = x$, $\widehat{PEN} = y$, $\widehat{BFP} = z$.

$$CA = \frac{h}{3}, \quad DM = \frac{4h}{9}, \quad EN = \frac{5h}{3},$$

et encore $$FP = \frac{5h}{9} + FE = \frac{5h}{9} + \frac{EI}{2\sin\left(\frac{IFE}{2}\right)} = \frac{5h}{9} + \frac{EI}{2\sin\frac{z}{2}}.$$

Le premier arc AM est un quadrant, et $\widehat{ACM} = 90°$.

D'autre part, soit H le milieu de l'arc AM ; il vient :

$$MH = \frac{2h}{3}\sin\frac{45°}{2} = \frac{8h}{9}\sin\frac{x}{2},$$

d'où $$\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{4}\sin\frac{45^\circ}{2} = \frac{3}{8}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Le calcul donne : $x = 33^\circ 21' 30''$.

Les autres arcs NP et PB répondant aux angles $\widehat{NEP} = y$ et $\widehat{PFB} = z$ dépendent de h et de a. On trouvera d'abord :

$$LC = ED \sin x = \frac{h}{9}\sin x$$

$$EL = DC + DK = \frac{h}{9} + ED\cos x,$$

puis : $$\overline{EI}^2 = \overline{EG}^2 + (LQ - IB)^2 = (a - EL)^2 + (LQ - EN)^2$$

$$\overline{EI}^2 = \left(a - \frac{2h}{9}\cos^2\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{81}(1 + \sin x)^2.$$

D'ailleurs ; $EG = EI\cos\frac{z}{2}$, d'où $$\cos\frac{z}{2} = \frac{a - \frac{2h}{9}\cos^2\frac{x}{2}}{EI}.$$

on tirera de là z en fonction de x et du rapport $\frac{a}{h}$.

D'autre part : $$90^\circ + x + y + z = 180^\circ,$$
d'où $$y = 90 - (x + z) = 73^\circ 19' 15'' - z.$$

On voit en outre que

$$\widehat{BPN} = BPF + EPN = \frac{180 - z}{2} + \frac{180 - y}{2} = 135^\circ + \frac{x}{2} = 151^\circ 40' 45''.$$

Le point de raccord P est donc sur l'arc décrit sur BN et capable de $151^\circ 40' 45''$. Ce résultat est indépendant de la position du centre E, de sorte que les deux derniers arcs pourraient se raccorder en tout autre point de l'arc de ce segment.

2° Courbe à deux centres AMnB.

Décrivons sur AB la demi-circonférence AnQB. Tout point n de cette courbe peut servir de raccordement à deux arcs dont l'un, tangent en A, ayant son centre en un point quelconque C de AQ et l'autre, tangent en B, ayant son centre au point de rencontre φ de nC avec BF.

La seule particularité de l'arc rampant est de raccorder deux verticales, tandis que la scotie raccorde deux horizontales ; les constructions sont donc identiques. **H. Lecocq.**

QUESTION 731

Deux droites Δ et Δ' sont perpendiculaires à une droite Δ'' et la rencontrent en A *et* B. *On considère deux cercles* C *et* C', *le premier tangent à Δ et Δ'', le second tangent à Δ' et Δ'' : ces deux cercles sont de plus tangents entre eux en* M. *La droite* BM *rencontre Δ en* A' *et la droite* AM *rencontre Δ' en* B'. *Montrer que* AA' *et* BB' *sont respectivement égaux aux diamètres des cercles* C *et* C'. **(E.-N. Barisien).**

Solution, par **A. Droz-Farny.**

Soient γ, γ', m les projections de C, C', M sur Δ''. La tangente commune aux deux cercles, coupe $\gamma\gamma'$ en son point milieu D et on aura dans le triangle rectangle CDC' : $DM = \frac{\gamma\gamma'}{2} = \sqrt{RR'}$, donc $AB = R + R' + 2\sqrt{RR'}$.

Dans le trapèze $C\gamma C'\gamma'$ on a :

$$\frac{\gamma m}{R} = \frac{\gamma' m}{R'} = \frac{2\sqrt{RR'}}{R + R'}, \quad \text{d'où} \quad \gamma m = \frac{2R\sqrt{RR'}}{R + R'},$$

et

$$Am = \frac{R^2 + RR' + 2R\sqrt{RR'}}{R + R'}.$$

On trouverait de même : $Mm = \dfrac{2RR'}{R + R'}$.

Donc :

$$\operatorname{tg} MAm = \frac{Mm}{Am} = \frac{2R'}{R + R' + 2\sqrt{RR'}} = \frac{2R'}{AB},$$

d'où $BB' = 2R'$, de même $AA' = 2R$.

Solutions exactes : **Ernest Foucart, Georges Daly, Svéchnicoff, Rebeix, L'Huillier.**

QUESTION 740

Solution, par **Ernest Foucart**

La tangente en un point M *d'une parabole, de sommet* O, *rencontre l'axe de la parabole en* T *et la tangente au sommet en* T'.

La droite Δ *menée, par* O, *parallèlement à la tangente* MTT', *rencontre la parallèle menée par* T, *à* OM, *en* P, *et la parallèle menée par* T' *à* OM, *en* P'.

Quand le point M *parcourt la parabole, le point* P, *le point* P' *et le milieu de* PP' *décrivent chacun une parabole* **E.-N. Barisien**).

L'ordonnée de M rencontre Δ en M_1.

On a $OP' = OM_1 \quad OP = 2OM_1$.

Le lieu de M_1 est évidemment une parabole de sommet O de paramètre égal au quart du paramètre de la primitive. Il est alors évident, d'après les relations précédemment écrites, que les différents points considérés décrivent des paraboles.

Solutions exactes : **L'Huillier. Francis Dauzats.**

SOLUTION DE LA QUESTION 742

Soit donné un triangle ABC *et soient* A_1, B_1, C_1, *les points où les médianes coupent le cercle circonscrit au triangle* ABC. *Si* S *et* S_1 *représentent les surfaces des triangles* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *on a la relation*

$$\frac{S_1}{S} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{\left|2(b^2 + c^2) - a^2\right| \left|2(a^2 + c^2) - b^2\right| \left|2(a^2 + b^2) - c^2\right|}.$$

Jorge F. d'Avillez.

Si nous désignons par $A_1B_1C_1$ les points de rencontre des médianes avec le cercle circonscrit, et par G le centre de gravité du triangle, nous avons

$$\frac{GA_1B_1}{GAB} = \frac{GA_1.GB_1}{GA.GB};$$

mais $GA = \frac{2}{3}m_a$, $GB = \frac{2}{3}m_b$, ou

$$\frac{GA_1B_1}{GAB} = \frac{GA_1 \, GB_1}{\frac{4}{9} m_a m_b}.$$

Si nous désignons le milieu du côté BC par A_2, le milieu du côté AC par B_2, et le milieu du côté AB par C_2, alors la ligne $GA = GA_2 + A_1A_2$, mais par le théorème de Stewart nous avons

$$b^2 + c^2 = \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.AA_1$$

d'où
$$AA_1 = \frac{b^2 + c^2}{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}},$$

et si nous retranchons de AA_1, AA_2, nous avons A_1A_2,

ou $$A_1A_2 = \frac{a^2 + c^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = \frac{2(b^2+c^2) - 2(b^2+c^2) + a^2}{2\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}} = \frac{a^2}{4m_a},$$

ou
$$GA_1 = \frac{1}{3}m_a + \frac{a^2}{4m_a} = \frac{3a^2 + 4m_a^2}{12m_a}.$$

Dans le triangle BGC, d'après un théorème connu, nous avons

$$\frac{4}{9}m_b^2 + \frac{4}{9}m_c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{2}{9}m_a^2,$$

d'où
$$a^2 = \frac{4}{9}\left[2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2\right],$$

en mettant au lieu de a^2 sa valeur, nous avons

$$GA_1 = \frac{2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{9m_a}.$$

De la même manière $GB_1 = \dfrac{2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{9m_b}$.

Ainsi nous avons

$$\frac{GA_1B_1}{GAB} = \frac{4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^2}{81m_am_b} : \frac{4}{9}m_am_b = \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^2}{9m_a^2m_b^2}.$$

De la même manière nous aurons les deux autres quotients

$$\frac{GA_1C_1}{GAC} \quad \text{et} \quad \frac{GB_1C_1}{GBC},$$

mais
$$\frac{GA_1B_1}{3GAB} = \frac{GA_1B_1}{ABC} = \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^2}{27m_a^2m_b^2}.$$

Et
$$\frac{GA_1C_1}{3GAC} = \frac{GA_1C_1}{ABC}, \quad \frac{GB_1C_1}{3GBC} = \frac{GB_1C_1}{ABC}.$$

Faisons la somme de ces trois quotients, il vient

$$\frac{S_1}{S} = \frac{(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^3}{27m_a^2m_b^2m_c^2},$$

mais
$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

ou
$$(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^3 = \frac{27}{64}(a^2 + b^2 + c^2)^3$$

$$m_a^2m_b^2m_c^2 = \frac{1}{64}\left[2(b^2 + c^2) - a^2\right]\left[2(a^2 + c^2) - b^2\right]\left[2(a^2 + b^2) - c^2\right]$$

en mettant ces valeurs au milieu du dénominateur et du numérateur, il vient

$$\frac{S_1}{S} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\left[2(b^2 + c^2) - a^2\right]\left[2(a^2 + c^2) - b^2\right]\left[2(a^2 + b^2) - c^2\right]}$$ C. Q. F. D.

N. Plakhowo.

QUESTION 745

Etant donnés trois points M, A, B, *démontrer que pour obtenir l'isotomique du conjugué harmonique de* M *sur* AB, *on peut appliquer le théorème suivant.*

Soient C, C' *les points de la perpendiculaire élevée au milieu de* AB, *d'où l'on voit* AB *sous un angle droit : la circonférence passant par* C, C', M *coupe* AB *au point cherché.* **G. L.**

Solution, par **A. Droz-Farny**

Soient O, le point milieu de AB. M' le conjugué harmonique de M par rapport à AB et μ son isotomique ; on a d'après une propriété bien connue

$$OM.OM' = \overline{OA}^2.$$

D'après la construction indiquée CC' étant l'axe radical des deux circonférences ABC et MCμC' on a aussi

$$OM.O\mu = OA.OB = \overline{OA}^2.$$

donc $$O\mu = OM'$$ C. Q. F. D.

Solutions exactes : **N. Plakhowo, Ernest Foucart.**

QUESTION 747

Solution par M. **A. Boutin**

On donne un triangle ABC ; *en* B, *on élève* BA' *perpendiculaire à* BA ; *en* C, CA'' *perpendiculaire à* CA. *On mène par* A *une transversale* AA'A'', *telle que* A *soit le milieu de* A'A'', *et l'on trace* Aα *perpendiculaire à* A'A''.

Démontrer que Aα *et les droites analogues* Bβ, Cγ *sont concourantes.*

(G. L.)

Soient x, y, l, les angles : BAα, CAα, et la longueur AA' = AA''. On a :

$$c = l \sin x \qquad b = l \sin y.$$

d'où $$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{c}{b}.$$

La droite Aα est donc telle que les distances d'un de ses points aux côtés qui comprennent l'angle A, soient proportionnelles à ces côtés ; c'est la symédiane issue de A. Les trois droites analogues sont donc concourantes au point de Lemoine de ABC.

Solution exacte : **A. Droz-Farny.**

QUESTION 750

Toute symédiane AK *d'un triangle* ABC *rencontre le cercle de Brocard en un second point* D, *tel que cette symédiane est bissectrice de l'angle* BDC, *et cet angle* BDC *est double de l'angle* A. **(E. Lauvernay).**

Solution et développements, par **A. Droz-Farny**

Construisons les deux cercles adjoints tangents en A aux côtés AC et AB et passant respectivement par les sommets B et C du triangle ABC. Ces cercles se coupent en D. Les droites AD et BD coupent la circonférence circonscrite au triangle en E et F ; tirons enfin EF et CD.

De par la construction on a d'abord : angle DAC = DBA = AEF donc AC = EF ; angle BAD = ACD = DFE.

Les triangles ADC et DEF sont donc égaux et par conséquent AD = DE.

Les triangles ADC et BDA étant directement semblables, on trouve : 1° que le point D est le point double des figures directement semblables construites sur CA et AB ; 2° les perpendiculaires abaissées de D sur les droites homologues AC et BA étant dans le rapport de ces deux longueurs, AD est la symédiane issue de A ; 3° OD étant perpendiculaire sur AE, D appartient à la circonférence de Brocard, décrite sur OK comme diamètre : 4° angle

$$\text{BDE} = \text{DBA} + \text{DAB} = \text{A}$$

de même $\text{CDE} = \text{A}.$

La droite AD est donc bissectrice de l'angle BDC. Mais ici le théorème de M. Lauvernay doit être rectifier dans ce sens que

$$\text{BDC} = 2\text{A} \text{ si A est aigu ou droit.}$$

$$\text{A} = 360° - 2\text{A} \text{ si A est obtenus.}$$

5° Les points BODC sont sur une même circonférence.

Solution exacte : **M. Seunet.**

QUESTIONS PROPOSÉES

A'B'C' est le triangle médian du triangle ABC. A''B''C'' le triangle formé par les tangentes au cercle circonscrit de ABC. Les six points d'intersection des côtes non-correspondantes de ABC, A'B'C' sont sur la même conique.

(**Trinity, Cambridge**).

P est un point quelconque dans le plan du triangle ABC, PL, PM, PN les perpendiculaires sur les côtés. Trouver le lieu de P, si $\frac{\text{LM}}{\text{LN}}$ est donné.

(**Trinity, Cambridge**).

ERRATUM

Numéro de Juin page 148, dernière ligne, lire triangle S'B'C', SC'A', SA'B' au lieu de OB'C', OC'A', OA'B'.

Le Directeur-gérant,

Georges MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

PREMIÈRE PARTIE

Questions proposées aux Candidats

I. — A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE S^T-CYR

296. — Mener par une droite un plan tangent à une sphère. Faire l'épure en géométrie cotée.

Transformer en un produit de deux facteurs réels du deuxième degré le trinôme bicarré : $x^3 + x^3 + 1$.

Dans un triangle isocèle, on connaît la base et la hauteur relative à cette base; calculer les rayons des cercles inscrit et circonscrit.

On donne un cercle de centre O et un point A intérieur à ce cercle, mener par ce point A une corde CAB telle que

$$AB - AC = l,$$

l étant une longueur donnée.

296 bis. — Dans un cercle donné, inscrire un décagone régulier concave ou convexe.

Déterminer m de manière que l'équation $x^2 - mx + 7 = 0$ ait une racine et une seule comprise entre 1 et 2.

On donne deux segments de droite AB, CD, dans un même plan, on demande le lieu des points P tels que les deux triangles PAB, PAC soient équivalents.

296 ter. — Lecture de la carte d'état-major. Comment oriente-t-on une carte à l'aide d'une boussole ? Que représente le bord droit de la carte d'Etat-Major ? Que faut-il connaître pour faire l'orientation avec la boussole ? Définir le méridien magnétique. Quelle est la déclinaison de Paris?

296 quater. — Comment compose-t-on deux forces parallèles et de même sens ? de sens contraires ?

Parler du cuivre. Quelles sont ses propriétés ? Quels sont les alliages courants du cuivre ? Parler du laiton. Quelle est la composition du laiton ? Quelle est la proportion de cuivre et de zinc ? Composition du bronze. Quels avantages font utiliser ces deux alliages ? A quelle température se forge le laiton ?

297. — Parler du passage de l'état solide à l'état liquide. Tous les corps fondent-ils de la même façon ? Citer des corps qui fondent en passant par l'état pâteux. Comment se comporte la

fonte de fer quand on la chauffe? Enoncer les lois de la fusion. Indiquer approximativement quelques températures de fusion : étain, soufre, phosphore. Qu'indique la deuxième loi de la fusion? Quelle est la chaleur de fusion de la glace? Est-ce qu'on ne peut faire passer un corps de l'état solide à l'état liquide que par la chaleur? Comment se fait-il que la pression fasse fondre la glace?

II. — A L'INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

298. Mathématiques. — Pour quelles valeurs de a l'équation : $x^2 - 2(a-3)x + a^2 - 1 = 0$ a-t-elle ses racines réelles. Indiquer pour chacune de ces valeurs les signes des racines. Construire la courbe : $y = \frac{x^2 - 7x + 10}{(x-1)^2}$.

298 bis. — Calculer par logarithmes :

$$x = \frac{\sqrt[8]{1845} + \pi - 7\pi}{(1 + 1842)\sqrt[23]{59667}}.$$

298ter. Physique et Chimie. — Un tube contenant du mercure est renversé sur une cuve remplie du même liquide; le mercure s'élève à 55 centimètres au-dessus du niveau dans le vase, et laisse un espace de 45 centimètres rempli d'air. Quel sera le volume de l'air quand les surfaces seront sur un même plan horizontal; la pression athmosphérique égale 76 centimètres.

III. — AU BACCALAURÉAT LETTRES-MATHÉMATIQUES

299. Mathématiques. — On demande ce que devient l'expression $1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} \ldots\ldots\ldots\ldots$ quand le nombre α supposé positif et supérieur à 1 s'approche indéfiniment de 1.

(*Au choix*) *a*). — Théorèmes sur les forces parallèles.

b) Théorème de Varignon.

c) Théorie du treuil (ordinaire et différentiel).

299bis. Physique. — Quel volume faut-il attribuer à un

ballon gonflé avec un gaz de densité 0,547 pour qu'il puisse à 0° et à 760 millimètres enlever 200 kilogrammes et posséder une force ascensionnelle de 10 kilogrammes.

(*Au choix*). — *a*) Recherche de la tension maxima de la vapeur d'eau.

b) Chaleur rayonnante.

c) Densité des gaz.

IV. — BACCALAURÉAT (LETTRES-SCIENCES)

300. Mathématiques. — Calculer les coordonnées du point A symétrique du point B $(x_1\ y_1)$ par rapport au cercle $x^2 + y^2 = R^2$.

(*Au choix*). — *a*) Eclipses de lune,

b) Eclipses de soleil.

c) Inégalité des saisons.

300 bis. Physique. — Un objet éclairé est à une distance de 23 décimètres d'un tableau blanc sur lequel on veut projeter son image. En essayant une lentille on trouve qu'on peut lui donner deux positions pour lesquelles la projection a lieu et que ces deux positions sont à une distanc l'une de l'autre égale à $\sqrt{161}$. On demande la distance focale de la lentille.

(*Au choix*). — *a*) Expérience d'Œrstœd.

b) Electroscope à feuilles d'or.

c) Galvanomètres.

V. — AUX ÉCOLES D'AGRICULTURE

301. Arithmétique. — Trois libraires vendent le même ouvrage d'après les conditions suivantes :

Le premier fait une remise de 25 % sur le prix fort ou prix marqué de l'exemplaire ;

Le deuxième accorde seulement 19 1/2 % de remise, mais donne 13 volumes pour 12 ;

Le troisième fait une remise de 22 1/2 % sur le prix marqué, sans treizième, et accorde en outre un escompte de 3 1/4 % du prix réduit, à l'acheteur au comptant.

Lequel des trois offre, à l'acheteur au comptant, les conditions les plus avantageuses?

301 bis. — Calculer $x = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\dfrac{7528\pi + 1}{6573 + 7\pi}}}}$.

VI. — AUX ÉCOLES DE COMMERCE

(*Les modifications récentes apportées aux programmes d'entrée indiquent pour ces Écoles une composition de géométrie*).

302. Arithmétique. — Un négociant qui a emprunté 10 000 francs pour un an à raison de 6 $^0/_0$ trouve au bout de quelque temps à emprunter la même somme à $4\,^1/_2$ $^0/_0$. En conséquence, il rembourse le premier prêteur, et à la fin de l'année il a payé en tout 512fr,50 d'intérêts.

Combien de temps a-t-il gardé l'argent du premier prêteur.

302 bis. Algèbre. — Résoudre le système

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 888,$$
$$(x - y)(x^2 - y^2) = 48.$$

302 ter. Géométrie. — Dans un cercle de 26 mètres de rayon, on mène perpendiculairement au diamètre une corde de 24 mètres. Quelles sont la longueur des deux segments formés par la corde sur le diamètre.

DEUXIÈME PARTIE

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE
(CONCOURS DE 1898)

Solutions, par M. **Léopold Massip**, professeur de mathématiques spéciales à l'École préparatoire Saint-Georges

PREMIÈRE QUESTION. — *Étudier les variations de* $y = \dfrac{8x^2 + 9x - 14}{x^2 + x - 1}$ *lorsque* x *prend toutes les valeurs possibles. — Donner une représentation graphique de la fonction :*

De $y = \dfrac{8x^2 + 9x - 14}{x^2 + x - 1}$ je tire : $x^2(8 - y) + x(9 - y) + (y - 14) = 0$.

Exprimons la réalité des racines cela donne :

$$(9 - y)^2 - 4(8 - y)(y - 14) \geqslant 0.$$

Développons les calculs, cette inégalité donne :

$$5y^2 - 106y + 529 \geq 0.$$

Calculons les racines du trinôme : $5y^2 - 106y + 529 = 0$ et rappelons que ce trinôme est positif, c'est-à-dire prend le signe de son premier terme pour les valeurs de y *non comprises entre les racines*, ces racines sont :

$$y' = \frac{53 + \sqrt{(53)^2 - 5 \times 529}}{5},$$

$$y'' = \frac{53 - \sqrt{(53)^2 - 5 \times 529}}{5},$$

On voit que y' est un *minimum* et que y'' est un *maximum*. Remarquons que pour ces valeurs y' et y'' de y on a $x = \dfrac{y - 9}{2(8 - y)}$ ce qui donne sensiblement $x = -0,404$, $x = 12,404$.

Les valeurs de x qui rendent y nul sont les racines de l'équation

$$8x^2 + 9x - 14 = 0$$

il est facile de calculer ces racines.

Les valeurs de x qui rendent y infini sont les racines de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Remarquons, ce qui est nécessaire, que les polynômes $8x^2 + 9x - 14$ et $x^2 + x - 1$ n'ont pas de facteurs communs.

Donnons à x la valeur $\pm \infty$. La valeur de y est 8.

Ajoutons aux valeurs trouvées pour y celle de y pour $x = c$ formons le tableau qui donne les valeurs de x et de y, nous aurons les éléments nécessaires et suffisants pour construire la courbe demandée.

x	$-\infty$	-2	$-1-\sqrt{5}$	$0,404$	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{7}{8}$	6	$12,404$	$+\infty$
y	0	0	$\mp\infty$	$13,17$	14	$-\infty$	0	8	$8,039$	8
				minimum					*maximum*	

Léopold Massip.

Deuxième question. — *Calculer les côtés d'un trapèze isocèle circonscrit à un cercle de rayon* R *sachant que le volume engendré par ce trapèze lorsqu'il tourne de sa plus grande base est égal à* $8\pi a R^2$. — *Discussion.*

Soient x, y, z les trois côtés consécutifs du trapèze isoscèle. On a dans le cas actuel de la question :

(1) $$\frac{x}{2} + \frac{z}{2} = y.$$

Abaissons une hauteur du trapèze on en conclut :

(2) $$y^2 - \frac{(z - x)^2}{4} = R^2.$$

Pour évaluer le volume engendré décomposons le trapèze en un rectangle (de base x et de hauteur $2z$) et en deux triangles rectangles l'hypothénuse étant y et les côtés de l'angle droit égaux à $2R$ et à $\left(\frac{z}{2} - \frac{x}{2}\right)$ ceci nous donne l'équation :

(3) $$z + 2x - 6a.$$

L'équation $\frac{x}{2} + \frac{z}{2} = y$ donne $(z + x^2 = 4y^2$

L'équation : $y^2 - \frac{(z-x)^2}{4} = 4R^2$ donne $(z-x)^2 = 4y^2 - 16R^2$.

On en conclut que : $xz = 4R^2$ ou $z.2x = 8R^2$, cette équation rapprochée de $z + 2x = 6a$ montre que z et $2x$ sont racines de $X^2 - 6aX + 8R^2 = 0$.

Pour que les racines de cette équation soient réelles il faut et il suffit que

$$9a^2 - 8R^2 \geqslant 0,$$

d'où

$$a \geqslant \frac{2R\sqrt{2}}{3},$$

la discussion s'achève facilement. **Léopold Massip.**

SOLUTION DE LA QUESTION 205

1) *Un cône de hauteur* h *est inscrit dans une sphère de rayon* R, *à quelle distance* x *du sommet du cône faut-il mener un plan parallèle au plan de sa base pour que l'aire de la section faite dans le cône soit le* $\frac{1}{3}$ *de l'aire de la section faite dans la sphère par le même plan.*

La hauteur du cône étant h, sa génératrice sera $b^2 = 2Rh$ ou $bh = \sqrt{2Rh}$ et $h = \sqrt{2Rh}\cos\varphi$ d'où $\cos\varphi = \frac{h}{\sqrt{2Rh}}$ ou $\sin\varphi = \sqrt{\frac{h}{2R-h}}$.

Le rayon de la base du cône sera égal à $h\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{h(2R-h)}$.

La section faite dans la sphère par un plan parallèle à la base de la cône aura pour rayon $\sqrt{x(2R-x)}$. Si nous désignons par x la distance du sommet à la section faite par le plan alors la section faite dans le cône aura pour rayon $\sqrt{\frac{x(2R-x)}{3}}$.

Comme le plan est parallèle à la base les deux triangles semblables nous donnent $\frac{x}{h} = \sqrt{\frac{x(2R-x)}{3h(2R-h)}}$.

Elevant cette égalité au carré et divisant l'égalité par $\frac{x}{h}$ il vient :

$$\frac{x}{h} = \frac{2R-x}{3(2R-h)},$$

d'où nous obtenons pour la valeur de x : $x = \frac{Rh}{3R-h}$.

2) Si dans un triangle $\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$ le triangle est rectangle ou isoscèle.

En remplaçant $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}$ et $\operatorname{tg} C = \frac{\sin C}{\cos C}$ il vient :

$$\frac{\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin C}{\cos C}} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} \quad \text{ou} \quad \frac{\cos C}{\cos B} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

Or, cette dernière égalité ne peut exister que pour $\sin 2l = \sin 2B$, $B = C$; ou $\cos B = \sin C$.

Dans le premier cas le triangle est isoscèle, dans le second cas il est rectangle. **Natalie Ohotnikoff.**

SOLUTION DE LA QUESTION 153

Trouvez deux nombres dont la somme soit 12 et le produit 35.

Le produit 35 peut être décomposé en deux facteurs d'une seule manière $5 \times 7 = 35$; la somme de ces facteurs est 12 ce qui prouve que les nombres 5 et 7 satisfont à la question.

Ou $x + y = 12$, $xy = 35$ d'où les valeurs de x et de y sont les racines d'une équation de second degré.

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$
$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 35} = 6 \pm 1$$
$$x_1 = 7 ; x_2 = 5$$

ou $$x_1 = 5 ; x_2 = 7.$$

Résoudre

$$x(y + z) = a$$
$$y(x + z) = b$$
$$z(x + y) = c.$$

En retranchant la troisième égalité de la deuxième il vient

$$x(y - z) = b - c$$

divisant la première égalité par l'égalité trouvée nous avons :

$$\frac{y + z}{y - z} = \frac{a}{b - c} \quad \text{d'où} \quad z = \frac{b + c - a}{a + b - c} \cdot x$$

puis retranchant la deuxième égalité de la première et en divisant la troisième égalité par l'égalité trouvée, nous avons :

$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{c}{a - b} \quad \text{d'où} \quad y = \frac{b + c - a}{a + c - b} x.$$

Mettons les valeurs de x et de y dans la première équation

$$x^2\left(\frac{b + c - a}{a + b - c} + \frac{b + c - a}{a + c - b}\right) = a,$$

d'où $$x^2 = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2(b + c - a)} \quad \text{et} \quad x = \pm\sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{2(b + c - a)}}.$$

Pour avoir les valeurs de y et z il ne faut faire qu'une permutation tournante des lettres a, b etc.,

où $$y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - (c - a)^2}{2(a + c - b)}} \quad \text{et} \quad z = \pm\sqrt{\frac{c^2 - (a - b)^2}{2(b - a + c)}}.$$

Natalie Ohotnikoff,
élève au gymnase Arsenieff à Moscou.

TROISIÈME PARTIE

REMARQUES

CONCERNANT LES FORMULES FONDAMENTALES DE LA TRIGONOMÉTRIE

par M. **Escary**, professeur au Lycée de Foix

(*Suite*, v. p. 161)

Nous allons la transformer en y introduisant la trigonométrie ; et à cet effet, nous allons suivre les variations du rapport $\frac{OB}{OA}$ quand l'angle $x = AOB$

α	$\frac{OB}{OA}$
0	$+1$
$\frac{\pi}{2}$	± 0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	± 0
2π	$+1$

varie de 0 à 2π. Ces variations, données par le tableau ci-contre, sont précisément celles du cosinus de l'angle α, et la géométrie permet ensuite de démontrer que ce même rapport est effectivement égal à $\cos \alpha$, car si du point O comme centre, avec l'unité pour rayon, on décrit un arc de cercle MN, les deux triangles semblables OMP et OAB dont la construction est toujours possible, donnent

$$\frac{OB}{OA} = \cos \alpha,$$

et l'identité (4) se transforme en la suivante :

$$(5) \qquad OB = OA \cos \alpha,$$

qui se trouve ainsi rattachée aux variations des lignes trigonométriques, non seulement pour les quatre quadrants, mais encore pour toutes les valeurs imaginables d'un arc réel.

Maintenant, si dans l'identité (5) où la longueur OA est supposée constante et se comporter comme le rayon d'un cercle, lequel est toujours positif, on la suppose variable, et par suite susceptible de passer par zéro et de changer de signe, cela n'empêche pas cette même égalité (5) d'être une identité, à la condition d'y regarder cette longueur OA comme une quantité algébrique, et d'adopter par suite, pour la détermination du signe dans le second membre, la règle des signes de la multiplication algébrique. L'égalité (5) qui a de cette manière un sens arithmétique et à la fois algébrique, est une égalité de même espèce que

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

puisqu'elle ne renferme, comme cette dernière, que les principes dont on fait usage dans cette partie de l'algèbre qui a pour objet de former des identités.

De là résulte immédiatement, par une généralisation facile, l'identité suivante :

$$(6) \qquad AB \cos \alpha + BC \cos \beta + CD \cos \gamma + DE \cos \delta + EF \cos \varepsilon = A'B' \cos \alpha' + B'C' \cos \beta' + C'F \cos \gamma' = AF \cos \lambda$$

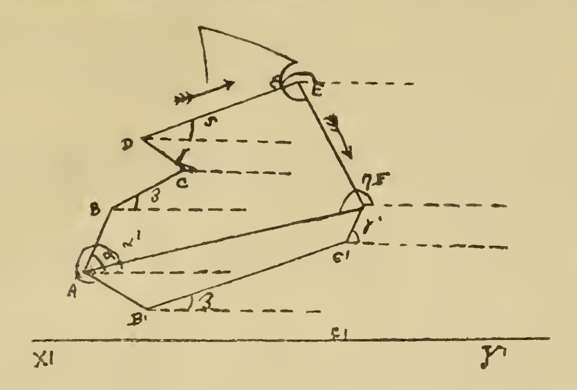
où α, β, γ, δ, ε, λ et α', β', γ' sont les angles dont les sommets supposés transportés au centre du cercle qui sert habituellement à définir et à étudier les lignes trigonométriques, sont tous comptés à partir de l'origine et dans le sens positif comme cela doit être, car la projection sur X'X de la ligne polygonale ABCDEF parcourue dans le sens indiqué par les flèches, est manifestement égale à celle de AF parcourue dans le sens AF, et de la ligne AB'C'F parcourue dans le sens AB'C'F. De là encore cette nouvelle identité :

$$(7) \quad AB \cos \alpha + BC \cos \beta + CD \cos \gamma + DE \cos \delta + EF \cos \varepsilon + FA \cos n = 0$$

où la même ligne brisée est supposée fermée et parcourue dans le sens ABCDEF et dans laquelle les angles sont encore comptés de la même manière, c'est-à-dire dans le sens regardé habituellement comme positif, dans les variations des lignes trigonométriques.

Les deux identités trigonométriques (6) et (7), nées de la définition de la projection d'une droite sur une autre, rapprochée à la fois de l'arithmé-

tique, de la variation des lignes trigonométriques, et de la règle des signes de la multiplication algébrique, constituent les deux résultats généraux



que nous voulions obtenir et que l'on trouve dans les différents ouvrages de trigonométrie qui ont paru depuis un certain nombre d'années.

Ces formules reçoivent des applications diveases et nombreuses, surtout dans le domaine de la géométrie. Nous allons appliquer la formule (6) à la détermination du cos et du sin de la somme de deux arcs a et b, connaissant les sin et les cos de ces deux derniers.

Soient le cercle O de rayon égal à 1. A l'origine de l'arc a et celle de la somme $a + b$; puis, supposons que l'on ait AM $= a$, MN $= b$, AMN $= a + b$.

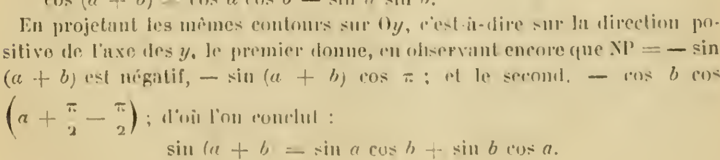
Construisons le sin NP et le cos OP de l'arc $a + b$, et ensuite le sin NQ et le cos OQ de l'arc b, en prenant le point M pour origine de ce dernier arc. Les projections des deux contours OPN et OQN sur la direction Ox étant identiques à la projection de ON sur la même direction, sont identiques entre elles. Or, en observant que OP $= -$ cos $(a + b)$ est négatif, ainsi que OQ $= -$ cos b, la projection de OPN sur Ox se réduit à $-\cos(a+b)\cos\pi$, et celle de OQN à $-\cos b \cos(a+\pi) + \sin b \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$.

En observant que l'on a $\cos\pi = -1$

$\cos(a+\pi) = -\cos a$, $\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a$

on a finalement l'identité :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$



En projetant les mêmes contours sur Oy, c'est-à-dire sur la direction positive de l'axe des y, le premier donne, en observant encore que NP $= -\sin(a+b)$ est négatif, $-\sin(a+b)\cos\pi$; et le second, $-\cos b \cos\left(a + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$; d'où l'on conclut :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

On constate aisément que, en appliquant la même formule (6), on retrouve constamment les identités (1), toujours avec la même forme et les mêmes signes pour toutes les valeurs réelles des arcs a et b.

Escary, professeur au lycée de Foix.

EXTRAIT D'UNE CORRESPONDANCE

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous soumettre une remarque au sujet des puissances successives des nombres dont certaines lois vous ont été communiquées par l'un de vos correspondants.

La manière qui a servi à opérer étant toute de tâtonnements, il vaut mieux y substituer une méthode mathématique qui, étant tout à fait rigoureuse, satisfait entièrement l'esprit.

Voici comment on peut opérer :

1° Considérons d'abord la suite des nombres entiers à la puissance 1, et soit a un nombre quelconque on peut écrire : $a \quad a+1 \quad a+2 \quad a+n$.

Il s'agit de savoir si l'accroissement est constant pour tous les termes ; pour cela prenons la dérivée des nombres par rapport à a ; on aura :

$$\frac{da}{da} = 1 \qquad \frac{d(a+1)}{da} = 1 \qquad \frac{d(a+n)}{da} = 1.$$

Ainsi, pour obtenir un terme quelconque, il suffit d'ajouter 1 au précédent.

2° Soit maintenant la suite des carrés des nombres. Si a est un terme quelconque, on aura : $a^2 \quad (a+1)^2 \quad (a+2)^2 \quad (a+n)^2$.

La dérivée première de ces quantités sera :

$$\frac{da^2}{da} = 2a \qquad \frac{d(a+1)^2}{da} = 2(a+1) \qquad \frac{d(a+n)^2}{da} = 2(a+n).$$

Comme cette dérivée est encore fonction de a, il faut effectuer la dérivée seconde des quantités primitives

$$\frac{d^2a^2}{da^2} = \frac{d2a}{da} = 2 \times 1 \qquad \frac{d^2(a+n)^2}{da} = \frac{d2(a+n)}{da} = 2 \times 1.$$

Ainsi, le terme constant 2×1 s'obtient au moyen d'une dérivée seconde et pratiquement, il faudra faire deux soustractions successives pour le trouver.

			1re Soustraction	2e Soustraction
Exemples	1	$1^2 = 1$		
			3	
	2	$2^2 = 4$		2
			5	
	3	$3^2 = 9$		2
			7	
	4	$4^2 = 16$		2
			9	

Examinons enfin le cas de la 3e puissance.

On aura la suite : $a^3 \quad (a+1)^3 \quad (a+2)^3 \quad (a+n)^3$.

La dérivée première de ces quantités sera

$$\frac{da^3}{da} = 3a^2, \qquad \frac{d(a+1)^3}{da} = 3(a+1)^2, \qquad \frac{d(a+n)^3}{da} = 3(a+n)^2.$$

Pour faire disparaître a, il faut prendre la dérivée seconde, puis la dérivée troisième, ce qui donne successivement :

Dérivée seconde :

$$\frac{d^2a^3}{da^2} = 3 \times 2 \times a \qquad \frac{d^2(a+1)^3}{da^2} = 3 \times 2 \times (a+1) \qquad \frac{d^2(a+n)^3}{da^2} = 3 \times 2 \times (a+n)$$

et dérivée troisième :

$$\frac{d^3a^3}{da^3} = 3 \times 2 \times 1; \qquad \frac{d^3(a+1)^3}{da^3} = 3 \times 2 \times 1; \qquad \frac{d^3(a+n)^3}{da^3} = 3 \times 2 \times 1.$$

Le terme constant est donc $3 \times 2 \times 1$; comme il faut recourir à une dérivée troisième pour l'obtenir, il faudra faire une triple soustraction.

	nombres	cubes	1re soustraction	2e soustraction	3e soustraction
	1	$1^3 = 1$			
			7		
	2	$2^3 = 8$		12	
			19		6
Exemples	3	$3^3 = 27$		18	
			37		6
	4	$4^3 = 64$		24	
			61		6
	5	$5^3 = 125$		30	
			91		6

En général, pour la $n^{\text{ième}}$ puissance, il faudra prendre la $n^{\text{ième}}$ dérivée ce qui donnera le produit : $1.2.3.4. (n-1)n$ pour terme constant et pratiquement, le nombre des soustractions sera égal à n.

Henri Gay-Lancermin.

SOLUTION CORRIGÉE DE LA QUESTION 763

Une confusion ayant eu lieu dans la solution de la question 763 publiée dans ce journal, page 158, voici la solution exacte :

On sait que le centre N du cercle inscrit au triangle complémentaire de F est le centre du cercle orthogonal aux trois cercles exinscrits. Soit O le centre du cercle circonscrit à F, G le centre de gravité, H l'orthocentre et I le centre du cercle inscrit ; on sait que O, G, ω, H sont en ligne droite et de même N, G, I. De plus, ON est parallèle à HI, et on a aussi $IG = 2GN$, $HI = 2ON$, donc $\omega N = \frac{1}{2} OI$, ω étant le centre du cercle des neuf points.

Or, on a $$OI = \sqrt{R(R-2r)},$$

donc $$\omega N = \frac{1}{r}\sqrt{R(R-2r)}.$$

Jorge F. d'Avillez.

Pour les quelques questions qui suivent, le lecteur est prié de faire la figure et de se rapporter aux énoncés dans le Journal de Mathématiques élémentaires.

SOLUTION DE LA QUESTION 733

par **L'Huillier**

1° On a $\frac{Dd}{OM_1} = \frac{AD}{AM_1} = \frac{MM_1}{2OM_1}$ d'où $Dd = a$. Le lieu est la parallèle à Ox à la distance a.

2° On a
$$\frac{Ee}{OM'_1} = \frac{Ae}{OA} = \frac{AE}{AM'_1} = \frac{MM'}{MM'_1},$$
ou en supprimant le 3e rapport $\frac{Ee}{OM + 2a} = \frac{Ae}{a} = \frac{a}{OM + a} = \frac{Ae + a}{OM + 2a}$,

donc
$$Ee = Ae + a = Oe.$$

3° Projetant a sur Ox au point a_1, on a $Aa_1 = aG - a$, $aa_1 = OG$ et le triangle Aaa_1 donne $(\overline{aG} - a)^2 + \overline{OG}^2 = \overline{aA}^2 + \overline{aM}^2 = \overline{aG}^2 + a^2$.

ou
$$\overline{OG}^2 = 2a.aG.$$

Soit α le milieu de OA, on a : $\overline{aO}^2 + \overline{aA}^2 = 2\overline{a\alpha}^2 + \frac{a^2}{2}$;

or $\overline{aO}^2 = \overline{OG}^2 + \overline{aG}^2 = \overline{AG}^2 + 2a.\overline{aG}.\overline{aA}^2 = \overline{aM}^2 = \overline{aG}^2 + a^2$.

et
$$\overline{aO}^2 + \overline{aA}^2 = 2\overline{a\alpha}^2 + \frac{a^2}{2} = 2\overline{aG}^2 + 2a.aG + a^2,$$

et enfin
$$\overline{a\alpha}^2 = \left(\overline{aG}^2 + \frac{a}{2}\right)^2.$$

d'où
$$a\alpha = aG + \frac{a}{2}.$$

Le lieu est donc une parabole de foyer α ayant pour tangente au sommet Oy.

4° AO' et MB sont respectivement symétriques de AO et MO par rapport à AM, donc AO' est perpendiculaire sur MB et égale à a. On a

$$O'M.O'B = a^2 \quad \text{ou} \quad OM.GC = a^2 = a.GM \quad \frac{OM}{GM} = \frac{a}{GC}.$$

Le point A_1 est fixe et $OA_1 = a$. **H. L'Huillier.**

SOLUTION DE LA QUESTION 735

par **L'Huillier**

Il faut trouver un point C tel que PC + QC soit maximum. La question se ramène immédiatement à trouver le point de contact d'une ellipse de foyers P et Q tangente au cercle. Alors CO est bissectrice de l'angle PCQ et la tangente en C rencontre AB en T conjugué harmonique de O par rapport aux points P et Q.

Le problème n'est possible que si le point T est en dehors de la demi-circonférence, c'est-à dire si $\frac{1}{OP} + \frac{1}{OQ} < \frac{2}{R}$.

Remarque. — J'ai pris P et Q de part et d'autre de O, sinon le point cherché serait évidemment une des extrémités du diamètre AB. Dans le cas où P et Q sont d'un même côté de O, le problème (dont la solution est identique

à la précédente, en remplaçant l'ellipse par une hyperbole) serait : Trouver un point C tel que la différence de ses distances aux points P et Q soit minimum. **H. L'Huillier.**

QUESTION 737 (*J. M. E.*, p. 143)

Solution

Les deux forces BD *et* CD *ont pour résultante* 2A'D. *Donc en* A' *nous aurons deux forces* : 2DO *et* 2A'D. *On voit facilement que leur résultante sera* 2A'O. *Les neuf forces se réduisent donc à trois* : 2A'O, 2B'O, 2C'O.

Cherchons la résultante des forces OA', OB', OC'. Formons le contour $OA'B'_1C'_1$. OC'_1 est la résultante. OC'_1 passe visiblement par le milieu de B'_1C', donc pour le centre de gravité G de OB'_1C'. Or, la médiane passant par C' dans OB'_1C' coïncide avec celle passant par C' dans A'B'C' puisque OB'_1 et A'B' se coupent en leurs milieux. Donc G est le centre de gravité de A'B'C' et aussi de ABC. De plus, $OC'_1 = 3OG$.

Donc la résultante des neuf forces considérées sera dirigée suivant GO et aura une longueur égale à 6OG.

Pour que les forces se fassent équilibre il faut que O et G coïncident.

Francis Dauzats.

QUESTION 738 (*J. M. E.*, p. 143)

Solution

En joignant tous les points A *au point* B *on a un système de forces concourantes dont la résultante passe par* B *et par le centre des moyennes distances des points* A (*ce qui est facile à établir*). *En faisant de même pour tous les points* B *nous aurons une série de forces concourantes au centre* α *des points* A.

Ces forces ont elles-mêmes une résultante passant par le centre des moyennes distances β des points B. La résultante agira donc suivant $\alpha\beta$. Elle sera égale à la somme algébrique des projections des forces sur $\alpha\beta$.

Or, si $aa'a''$... $bb'b''$ sont les projections des points sur $\alpha\beta$ la somme des projections sur $\alpha\beta$ de ABA'BA''B... est $m.\alpha b$ si m est le nombre des points A. Donc la somme des projections de toutes les forces sera : $m.\alpha b + m.\alpha b' + m.\alpha b'' + \ldots$

Or, $\alpha b + \alpha b' + \alpha b''\ldots = n.\alpha\beta$ si n est le nombre des points B.

Donc la résultante sera une force appliquée suivant $\alpha\beta$ et égale à mn fois cette distance. **Francis Dauzats.**

QUESTION 748 (*J. M. E.*, p. 168)

Solution, par **Francis Dauzats**

Soient H *l'orthocentre de* ABC, B'C' *les pieds des hauteurs issues de* B *et* C *et* I *le milieu de* AH.

Le quadrilatère complet AB'HC'BC a les milieux IMN de ses diagonales en ligne droite. Donc MN ne passe par A que si elle se confond avec la hauteur qui devient alors médiane. Le triangle est par suite isoscèle.

Fr. Dauzats.

L'aire du triangle ayant pour sommets les projections du centre de gravité sur les côtés est égale à $\frac{4S^3}{9}\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}$, a, b, c *et* S *désignant les côtés et l'aire du triangle donné.* **E.-N. Barisien.**

Soit G le centre de gravité. A', B', C' les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés ; les angles A et B'GC' étant supplémentaires, les triangles B'GC' et ABC donnent $\frac{\text{B'GC'}}{\text{S}} = \frac{\text{GB'.GC'}}{bc}$.

Or, on a, en représentant par h_a, h_b, h_c les hauteurs du triangle

$$\text{GA'} = \frac{h_a}{3} \quad \text{GB'} = \frac{h_b}{3} \quad \text{GC'} = \frac{h_c}{3} \quad \text{et} \quad 2\text{S} = ah_a = bh_b = ch_c,$$

donc $\frac{\text{B'GC'}}{\text{S}} = \frac{4\text{S}^2}{9b^2c^2}$ et de même $\frac{\text{C'GA'}}{\text{S}} = \frac{4\text{S}^2}{9a^2c^2}$ $\frac{\text{A'GB'}}{\text{S}} = \frac{4\text{S}^2}{9a^2b^2}$

donc $\frac{\text{A'B'C'}}{\text{S}} = \frac{4\text{S}^2}{9}\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right) = \frac{4\text{S}^2}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\right)$

et finalement $\text{A'B'C'} = \frac{4\text{S}^3}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\right).$

Jorge F. d'Avillez.

Soient A', B', C' *les pieds des bissectrices intérieures du triangle* ABC ; O *le point de concours de ces bissectrices* ; A'', B'', C'' *les milieux de* AA', BB', CC' ; S *et* 2p *la surface et le périmètre du triangle* ABC ; Σ *la surface du triangle* A''B''C''. *Démontrer les relations*

$$\Sigma = \frac{\text{AA'.BB'.CC'}}{16\text{p}} = \frac{\text{p}^3}{2\text{S}^2}.\text{OA''.OB''.OC''}.$$

E.-N. Barisien.

La surface du triangle Σ par rapport au triangle de référence ABC, est donnée par la formule $\Sigma = \frac{abc}{8\text{S}^2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

où (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) sont les coordonnées normales des trois sommets A'', B'', C''.

Or, on a $x_1 = \frac{\text{S}}{a}$ $y_1 = z_1 = \frac{\text{S}}{b+c}$ $y_2 = \frac{\text{S}}{b}$ $x_2 = z_2 = \frac{\text{S}}{a+c}$

$$z_3 = \frac{\text{S}}{c} \quad x_3 = y_3 = \frac{\text{S}}{a+b}.$$

donc
$$\Sigma = \frac{abc}{8\text{S}^2}\begin{vmatrix} \frac{\text{S}}{a} & \frac{\text{S}}{b+c} & \frac{\text{S}}{b+c} \\ \frac{\text{S}}{a+c} & \frac{\text{S}}{b} & \frac{\text{S}}{a+c} \\ \frac{\text{S}}{a+b} & \frac{\text{S}}{a+b} & \frac{\text{S}}{c} \end{vmatrix}$$

ou encore $$\Sigma = \frac{abcS}{8}\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{b+c} \\ \frac{1}{a+c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant, on trouve après réductions

$$(1) \qquad \Sigma = \frac{abcS}{2(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Si l_a, l_b, l_c sont les bissectrices intérieures de ABC, on a la formule connue $$S = \frac{l_a l_b l_c (b+c)(c+a)(a+b)}{8abcp}$$

donc $$AA'.BB'.CC' = \frac{8abcpS}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

En comparant cette formule avec (1), on trouve

$$(2) \qquad \Sigma = \frac{AA'.BB'.CC'}{16p}.$$

Or, $$OA'' = OA - \frac{AA'}{2} = \frac{l_a(b+c)}{2p} - \frac{l_a}{2} = \frac{l_a(b+c) - pl_a}{2p}$$

et encore $$OA'' = \frac{l_a(b+c-p)}{2p} = \frac{l_a(p-a)}{2p}.$$

On aura de même $OB'' = \frac{l_b(p-b)}{2p}$ $\quad OC'' = \frac{l_c(p-c)}{2p}$

et $$OA''.OB''.OC'' = \frac{l_a l_b l_c (p-a)(p-b)(p-c)}{8p^3}.$$

Mais $$(p-a)(p-b)(p-c) = pr^2$$

donc $$OA''.OB''.OC'' = \frac{l_a l_b l_c r^2}{8p^2}.$$

On aura alors

$$(3) \qquad \frac{p^3}{2S^2}.OA''.OB''.OC'' = \frac{l_a l_b l_c}{16p} = \Sigma.$$

Jorge F. d'Avillez.

QUESTIONS PROPOSÉES

Soient A', B', C' les pieds des hauteurs d'un triangle ABC et H son orthocentre. On prend le symétrique A'' de A' par rapport au milieu de BC, et les points analogues B'' et C''. Montrer que les droites AA'', BB', CC'' concourent en un même point et calculer les distances de ce point aux trois côtés du triangle ABC. **(E.-N. Barisien).**

Soit ABC un triangle donné dont les côtés sont a, b, c $(a > b > c)$, S l'aire, r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit.

Représentons par S_1 l'aire du triangle formé par l'orthocentre et par les centres des cercles inscrit et circonscrit. Soient : Σ l'aire du triangle dont les sommets sont les pieds des bissectrices intérieures, Σ_1, Σ_2, Σ_3 les aires

des triangles dont les sommets sont le pied d'une bissectrice intérieure et les pieds des deux bissectrices extérieures issues des deux autres sommets.

Démontrer la relation $\frac{\Sigma}{\Sigma_1 \cdot \Sigma_2 \cdot \Sigma_3} = \frac{r^2 S_1^2}{R^2 S^4}$.

(**Jorge F. d'Avillez**).

Soit donné un triangle équilatéral et une droite Δ située dans son plan ; si α, β, γ sont les distances des sommets à la droite, on a la relation

$$\alpha(\alpha - \beta) + \beta(\beta - \gamma) + \gamma(\gamma - \alpha) = \frac{3}{4} a^2$$

a étant le côté du triangle. (**Jorge F. d'Avillez**).

Soit ABC un triangle donné, $AA' = l_a$ la bissectrice intérieure de l'angle A, l'_a, l''_a les segments IA, IA' déterminés sur cette bissectrice par le centre I du centre inscrit, r le rayon de ce cercle. Démontrer les relations

$$\sum \frac{bc}{l_a} \cos\frac{A}{2} \cos A = p \qquad \frac{l_a}{l'_a l''_a} \cos\frac{A}{2} = \frac{2p^2}{abc}.$$

Jorge F. d'Avillez.

Arithmétique. — Si $N = a.^\alpha b.^\beta c^\gamma \ldots . s^\sigma$ démontrér que la somme des exposants qui figurent dans tous les diviseurs de N. décomposé en facteurs premiers est égale à :

$$\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots (\sigma + 1)(\alpha + \beta + \ldots + \sigma)}{2}.$$

Fontebasso.

(*Supplemento al periodico di mathematica*).

Démontrer que pour n entier et positif l'expression : $(3^{2n}.5^{4n+2} + 1)(8^{3n+2} + 8^{3n+1} + 1)$ est divisible par 1898. **Castelli.**

(*Supplemento al periodico di mathematica*).

Trigonométrie. — Démontrer la relation

1° $\sin^2 a + \sin^2(a + h) + \sin^2(a + 2h) + \ldots + \sin^2[a + (n - 1)h]$

$$= \frac{n}{2} - \frac{\sin nh \cos[2a + (n - 1)h]}{\sin h}.$$

2° $\cos^2 a + \cos^2(a + h) + \cos^2(a + 2h) + \ldots + \cos^2(a + (n - 1)h)$

$$= \frac{n}{2} + \frac{\sin nh \cos[2a + (n - 1)h]}{\sin h}.$$

Celestri.

(*Supplemento al periodico di mathematica*).

Le Directeur-gérant,

GEORGES MARIAUD.

SAINT-AMAND (CHER). IMPRIMERIE SCIENTIFIQUE ET LITTÉRAIRE, BUSSIÈRE FRÈRES.

